融合積分解とその応用(2次元結び目を中心とした結び目理論)

AUTHOR(S):

前田, 亨

CITATION:

前田, 亨. 融合積分解とその応用(2次元結び目を中心とした結び目理論). 数理解析研究所講究録 1987, 620: 1-69

ISSUE DATE:

1987-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/99888

数理解析研究所講究録
620巻 1987年 1-69

融合積分解とその応用

大阪大 前田 亨（Toru MAEDA）

群の融合積は、Van Kampen－Seifertの定理にみられるように、空間の基本群（よって、空間）の研究に於て基本的に重要なことは、知られている通りである。これは、融合積が、無限群の構造研究で、いかに中心的かを示している。本稿では、次の5つの講演において、群の融合積、その意味での有限表示群の分解（特に、或る1つの部分群に関する既約因子への分解 ── star decomposition）の基本問題と、それに関した幾つかの結果を述べる。結び目、絡み目理論等への応用が、後半で扱われる。

講演項目

講演１： Amalgamated Decompositions

講演２： Star Decompositions of Groups along splitting Cyclic Groups

講演３： Existence of Factorizations for Links & Surfaces

講演４： Group of Knot Groups

講演５： A Note on Groups of Composite Knots

有限群論は、単純群の分類の完成によって、その構造研究の才１段階を終えるという大成果を得た。一方、無限群論、特に有限表示群の構造論においては、分類不可能性が知られている（［１］）。この様な状境下で、有限表示群の構造研究の限界と方法を見い出すことが問題である。現時点で、私が最も基本的にすべきだと思うことは、(I)群の構成法と分解、(II)群の表現論 である。そして、具体的に与えられた群の構造を明らかにする（重要な群のclassの考擦をする）ことである。

(I) の群の構成法のうち、中心的なものは、次の

3つである。

構成法 1（群の正規拡大）

群 N, H と、写像 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\, N$ 　　$\xi : H \times H \to N$

s.t. $\quad \varphi(v)(\varphi(u)(a)) = \xi(u,v)^{-1} \cdot \varphi(uv)(a) \cdot \xi(u,v)$

$\qquad \xi(uv,w) \cdot \varphi(w)(\xi(u,v)) = \xi(u,vw) \cdot \xi(v,w)$

$\qquad \xi(1,1) = 1 \quad , \quad a \in N,\ u,v,w \in H$

が与えられたとき、集合 $G = H \times N$ に対し、積を、

$$(h_1, n_1) \cdot (h_2, n_2) = (h_1 \cdot h_2,\ \xi(h_1, h_2) \cdot \varphi(h_2)(n_1) \cdot n_2)$$

と定義すると、Gは群になる。これをNの<u>正規拡大</u>、または、<u>NのHによる拡大</u>といい、$E(N,H,\varphi,\xi)$と書く。

Nは、写像 $n \longrightarrow (1,n)$ により、自然にGの正規部分群として埋め込まれ、$G/N \cong H$ である。

この方向からの群の分解が、"*subnormal series*"であり、有限群に対しては、Schreier の細分定理に基づく、*composition series* に関する *Jordan-Hölder* の定理が本質的である。重要な *subnormal series* としては、アーベル群との関係で、*derived series* や *lower central series* 等がある。

<u>構成法</u> 2 (HNN拡大)

群Sと、その部分群 C 及び D、更に、同型写像 $\psi: C \xrightarrow{\cong} D$ が与えられたとき、

$$G = S * \langle t: \rangle \big/ \langle t^{-1} c t \psi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{S*\langle t: \rangle}$$

(自由積 $S*\langle t: \rangle$ の、そこでの $\{ t^{-1} c t \psi(c^{-1}) \mid c \in C \}$ の *normal closur* $\langle t^{-1} c t \psi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{S*\langle t: \rangle}$ による商群)を、Sの<u>HNN拡大</u>といい、HNN(S, ψ) と書き表わす。 Sは、Gの *base group*、C、D は、*associated subgroups* と呼ばれる。 Gは常に無限群である。

Sは、自由積 $S*\langle t: \rangle$ に自然に埋め込まれるが、それは、$S*\langle t: \rangle$ から G への自然な全準同型写像により、G = HNN(S, ψ) にも埋め込まれる。

よって、与えられた群 G が、その或る部分群 S に対し、G = HNN(S, ψ) となれば、Gは、HNN(S, ψ) と分解されたと言ってよいであろう。何故なら、Gの構造は、Sの構造と ψ の作用とで理解されるからである。 与えられた群を、HNN拡大の積み重ねとして、構造研究するのも、1つの方法であろう。

或る群 G が、ある部分群の HNN 拡大となっているとき、G は、HNN 拡大の構造をもつと呼ぶことにする。明らかに、これは、G から、無限巡回群の上への準同型写像が存在する（i.e. G が、無限巡回群 $\langle t: \rangle$ による (*splitting*) *extension* になっている）こととと同値である。$S \lhd \mathrm{HNN}(S, \psi)$ になるのは、$S = C = D$ のとき。

Example 0.1　$T = \langle x: \rangle$，無限巡回群，とし、φ を，$\varphi(x) = x^{-1}$ で与えられる T の自己同型写像とすると、群 $S = HNN(T, \varphi) = \langle x, y : y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ を得る。S を T の $\langle y: \rangle$ による拡大 $E(T, \langle y: \rangle, \varphi, \xi)$，$\xi(y_1, y_2) = 1$，$y_1, y_2 \in \langle y: \rangle$，と考えてもよい。更に、$\psi$ を、$\psi(x) = y$ で与えられる T から $\langle y: \rangle$ への同型写像とすると、$G = HNN(S, \psi)$ を得る。,$t : y^{-1}xy = x^{-1}$, $t^{-1}xt = y \rangle = \langle x, t : t^{-1}x^{-1}txt^{-1}xt = x^{-1} \rangle$ を得る。このとき、G から無限巡回群上へのいかなる準同型写像の *kernel* も、有限生成群とはなれない。

構成法 3 （融合積）

群 A、B と、それぞれの部分群 C、D、更に、同型写像 $\varphi : C \xrightarrow{\cong} D$ が与えられたとき、自由積 $S =$

$A * B$ の商群

$$G = A*B / \langle c\varphi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{A*B}$$

を、AとBの、C(又は、D)を融合部分群とする融合積といい、$A \underset{\varphi}{*} B$ 又は、$A \underset{c_i = \varphi(c_i)}{*} B$ (但し、$\{c_i\}$ は、Cの生成系)と、書き表わす。明らかに、$C = 1$ のときが、AとBの自由積であり、AとBは、自然に埋め込まれている。A, Bは、更に、$S = A * B$ から G への自然な全準同型写像により、G にも埋め込まれる。

<u>Remark</u> 0.2　融合積 $A \underset{\varphi}{*} B$ は、自由積 $A * B$ のHNN拡大の商群 $HNN(A*B, \varphi) / \langle t \rangle^{HNN(A*B, \varphi)}$。

<u>Remark</u> 0.3　$G = A \underset{\varphi}{*} B$, $\varphi : C \xrightarrow{\cong} D$, が有限群になるのは、A, B 共に有限群で、$A = C$ 又は、$B = D$ のときに、限る。また、$A \ntrianglelefteq G$ となるのは、$A = C$、$D \ntrianglelefteq B$ のときに限る。

<u>Example</u> 0.4　$A = \langle x : x^4 = 1 \rangle$, $B = \langle y : y^6 = 1 \rangle$, $C = gp(x^2)$, $D = gp(y^3)$, $\varphi : C \xrightarrow{\cong} D$ を $\varphi(x^2) = y^3$ とすると、$G = A \underset{\varphi}{*} B = A \underset{x^2 = y^3}{*} B = \langle x, y : x^4 = y^6 = 1,$

$x^2 = y^3 >$。この群 G を正規拡大の立場から見てみよう。$\mathbb{Z}_n$ を、位数 n の巡回群とする。G の centre は、$gp(x^2) \cong \mathbb{Z}_2$ で、$G/gp(x^2) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$。よって、$G$ は、$\mathbb{Z}_2$ の $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ による中心拡大となっている。また、y の G における normal closur $\langle y \rangle^G \cong \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_6$ で、$G/\langle y \rangle^G \cong \mathbb{Z}_2$ であるから、$\mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_6$ の $\mathbb{Z}_2$ による拡大とみることも出来る。一方、G の1次元homology群 $H_1(G) \cong G/[G,G]$ ($[G,G]$ は、G の交換子群) は、$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ と同型であるから、HNN拡大の構造は有しない。

群が、HNN拡大又は、融合積の構造をもつことの特徴付けが、次の　通りになされている：

樹グラフに作用する、

任意の有限表示群は、2次元複体又は、5次元多様体の基本群として実現できる。このことから、有限表示群の研究と(compact)多様体、複体の研究は、互いに深く掛り合っている。例えば、構成法1,2,3は、多様体論の構成法で基本的な、ファイバー空間、mapping torus，連結和に、それぞれ対応している。

低次元多様体論においては、多様体の構造と、その基本群との関係は密接で、早くから、その重要性が知られていた。Walthausen [2] 等の仕事があり、近年では、Thurston の登場により、更に、その関係の意味、重要性を深めていることは、特記すべきであろう。そこにおいても、上記3つの構成法は、中心的であり、加えて、表現論の重要性も、本質的になって来た。表現は、有限単純群の分類で知られている置換群、Lie 群、更に、群環への表現であり、これにより、群の構造（部分群束，準同型、性質）が、1つ1つ明らかになって来ている。勿論，それに対応する幾何学的構造もである。

講演1 *Amalgamated Decompositions*

本講演の目的は、融合積を再定義し、それに基づく星型分解（*star decomposition*）と、義と、そこでの基本問題を考えることにある。星型分解に関する細分定理、異なる星型分解の例、唯一分解の為の十分条件等が与えられる。

§1. Amalgamations

A. Pairs

Definition 1.1　群 X に対し、

$$\mathcal{C}_X = \{ \langle G, \varphi \rangle\ (\text{対}) \mid (1)\ G \text{は群}\ \ (2)\ \varphi : X \to G : \text{embedding} \}$$

と定義する。

Definition 1.2　$\langle G_1, \varphi_1 \rangle, \langle G_2, \varphi_2 \rangle \in \mathcal{C}_X$ に対し、G_1 から G_2 への同型写像 h で、$h \circ \varphi_1 = \varphi_2$ となるものが存在するとき、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle$ と $\langle G_2, \varphi_2 \rangle$ は同型であるといい、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$、あるいは、$h : \langle G_1, \varphi_1 \rangle \xrightarrow{\cong} \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ と書き表わす。

明らかに、'$\cong$'は、$\mathcal{C}_X$ 上の同値関係である。$\mathcal{C}_X/\cong$ を、C_X で、$\langle G, \varphi \rangle$ の同型類を、(G, φ) で書く。例えば、$C_{\{1\}}$。この場合には、$\mathcal{C}_{\{1\}}$ で、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ と、$G_1 \cong G_2$ は、同値であるから、$C_{\{1\}}$ = 抽象群全ての集り、と思ってよい。

Example 1.3　X を、$\mathbb{Z}_3 = \langle s : s^3 = 1 \rangle$, 位数 3 の巡回群、とする。$G = \mathbb{Z}_m = \langle t : t^m = 1 \rangle$、位数 m の巡回群、とする。$3 \nmid m$ ならば、$\mathbb{Z}_m$ は $\mathbb{Z}_3$ を部分群に含まないから、$\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair は、$C_{\mathbb{Z}_3}$ には存在しない。$m = 3m'$ ならば、$\{1, t^{m'}, t^{2m'}\}$ が、$\mathbb{Z}_m$ の唯一の位数 3 の部分群である。$\mathbb{Z}_3$ には、唯一の外部自己同型写像 $\rho(s) = s^2$ がある。この ρ が導く $\{1, t^{m'}, t^{2m'}\}$ の同型変換が、$\mathbb{Z}_m$ の自己同型に拡張されるか否かが、$\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair を、$C_{\mathbb{Z}_3}$ 中で考えるときには問題となる。φ_m を、$\varphi_m(s) = t^{m'}$ なる $\mathbb{Z}_3$ から $\mathbb{Z}_m$ への準同型写像とすると、$2 \nmid m'$ のとき、$\langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \circ \rho \rangle$、$2 \mid m'$ のとき、$\langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \rangle \not\cong \langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \circ \rho \rangle$ となる。$C_{\mathbb{Z}_3}$ 中、$\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair は、前者の場合、1つ、後者の場合には、2つ存在することになる。この様に、pair の考え方では、G 中の X の埋め込

まれた像だけでなく、その埋め込まれ方までが重要となる。

Example 1.4　Xを、$\mathbb{Z}=\langle s: \rangle$、無限巡回群、かつ、$G$も、無限巡回群 $\langle t: \rangle$ とする。自然数 m に対し、φ_mを、$\varphi_m(s)=t^m$ で定まる$\mathbb{Z}$からGへの準同型写像とする。このとき、(G, φ_m)，$m=1,2,\cdots$，が、$\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$ 中、無限巡回群を群部分にもつ全ての異なる pair を与えている。

以上、最も簡単な例をみたが、X，Gを種々考え、φをいろいろと取ることにより、興味ある例達、たくさん見付け、また、構成することが出来る。（［3］、本講演 4，5 も参照されたい。）

B．Product

Definition 1.5　群Xの1つの生成系を $\{x_i\}_{i\in I}$ とする（ここでは、便義上、fix させておく）。$\langle G_1, \varphi_1\rangle$，$\langle G_2, \varphi_2\rangle \in \mathcal{C}_X$ に対し、

$$\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle = \langle \underset{\varphi_1(x_i) = \varphi_2(x_i)}{G_1 * G_2}, \varepsilon_1 \circ \varphi_1 (= \varepsilon_2 \circ \varphi_2) \rangle$$

と定義し、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle$ と $\langle G_2, \varphi_2 \rangle$ の融合積（amalgamated product）と呼ぶ。ε_1，ε_2 は、それぞれ G_1，G_2 の $\underset{\varphi_1(x_i) = \varphi_2(x_i)}{G_1 * G_2}$ への自然な埋め込み写像である。

準定理 1.6　抽象群 X と、任意の $\langle G_k, \varphi_k \rangle \in \mathcal{C}_X$，$k = 1, 2, 3, 4$，に対し、

(1)　$\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle \in \mathcal{C}_X$

(2)　$\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle X, id_X \rangle \cong \langle G_1, \varphi_1 \rangle$

(3)　$\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ かつ $\langle G_3, \varphi_3 \rangle \cong \langle G_4, \varphi_4 \rangle$ ならば、$\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_3, \varphi_3 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle * \langle G_4, \varphi_4 \rangle$

証明．自明なので省略。

このことより、‘$*$’ は．$\mathcal{C}_X$ の内部演算を定義し、‘$\cong$’ は．この演算に対し、合同関係となる。(2) と合わせて次を得る：

定理 1.7　抽象群 X に対し、$\mathcal{C}_X$ は．積 ‘$*$’ に関し、単位元 (X, id_X) をもつ可換半群となる。

$$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) = (\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle)$$

を (G_1, φ_1), (G_2, φ_2) $(\in C_X)$ の融合積と呼ぶ。

Remark 1.8　$X = \{1\}$ のときが、自由積に相当する。

$\underline{\mathbb{C}}$. Subclasses

現実の研究では、C_X よりは、その或る条件を満たす subclass が、興味深かったり、重要である場合がほとんどである。そこで、積 '$*$' と、subclass に関する自然ないくつかの定義と、基本的な subclass の例を幾つか述べることにする。

Definition 1.9　抽象群 X に対し、C_X の subclass $\mathfrak{D} \neq \phi$ が、('$*$' に関して) closed であるとは、$\mathfrak{D}$ が、C_X の上記半群構造に関して部分半群をなすこと。i.e. $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in \mathfrak{D}$ ならば、$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in \mathfrak{D}$。

Definition 1.10　C_X の (closed な) subclass $\mathfrak{D}$ が、完全 (complete) であるとは、任意の $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in C_X$ に対し、$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in \mathfrak{D}$ ならば、(G_1, φ_1),

$(G_2, \varphi_2) \in \mathcal{D}$ となること。（このとき、明らかに、
$(X, id_X) \in \mathcal{D}$。）

基本的な subclass を４つ定義しておく：
抽象群 X に対し、

$$FG_X = \{ (G,\varphi) \in C_X \mid G \text{ は、有限生成群} \}$$

$$FP_X = \{ (G,\varphi) \in C_X \mid G \text{ は、有限表示群} \}$$

$$NR_X = \{ (G,\varphi) \in C_X \mid \varphi(X) \triangleleft G \}$$

$$SP_X = \{ (G,\varphi) \in C_X \mid G \text{ の或る正規部分群 } N \text{ に対し、}$$
$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \overset{\varphi}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \ ;\ split \}$$

とする。

準定理 1.11 (1) 任意の群 X に対し、

1) FG_X は、closed，

2) FG_X が complete $\Longleftrightarrow$ X が、有限生成

準定理 1.12 （G. Baumslag [4]）

FP_X が closed $\Longleftrightarrow$ X が、有限生成群。

Remark 1.13 有限表示をもたない有限生成群 X で、

$FP_X \neq \phi$ なるものがある。

準定理 1.14　任意の群 X に対し、NR_X は、completely closed。

Note 1.15　$(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in NR_X$ ならば、$G/\varphi(X) \cong (G_1/\varphi_1(X)) * (G_2/\varphi_2(X))$（自由積）。

準定理 1.16　任意の群 X に対し、SP_X は、completely closed。

Note 1.17　$(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in SP_X$.

$$1 \longrightarrow N_1 \longrightarrow G_1 \overset{\varphi_1}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \quad : \text{split}$$
$$1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow G_2 \overset{\varphi_2}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \quad : \text{split}$$
$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \overset{\varphi}{\rightleftarrows} X \longrightarrow 1 \quad : \text{split}$$

ならば、$N \cong N_1 * N_2$（自由積）。

証明．[3 . Prop 2.1.4] の証明参考。

D. Decompositions . (star decomposition)

Definition 1.18　Xを群、EをC_Xの closed な subclass とする。$(G, \varphi) \in E$ が、Eで prime（又は、indecomposable, irreducible）とは、

(1)　$(G, \varphi) \neq (X, id_X)$、かつ、

(2)　(G, φ)は、Eの２つの pair の積にならないか、

(3)　$(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2)$, $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in E$ ならば、$(G_1, \varphi_1) = (X, id_X)$ 又は、$(G_2, \varphi_2) = (X, id_X)$。

となることである。特に、「Eで」と断わらない場合は、「C_Xで」という意味である。

Definition 1.19　同じX, Eに対し、

$$(G_1, \varphi_1) * \cdots * (G_n, \varphi_n) \quad , \quad n < \infty$$

が、$(G, \varphi) \in E$の素因子分解であるとは、各(G_i, φ_i)が、Eで prime かつ $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * \cdots * (G_n, \varphi_n)$。

E. 基本問題

問題 I（埋め込み問題）　群Xの１つの生成集合$A = \{a_k\}$に対し、$\overline{\varphi} : A \to$ 群G が与えられたとき、

Φは、XからGへの単射準同型写像に拡張できるか。

問題II（同型問題）$\langle G_1, \varphi_1\rangle$, $\langle G_2, \varphi_2\rangle \in \mathcal{C}_X$に対し、$\langle G_1, \varphi_1\rangle \cong \langle G_2, \varphi_2\rangle$か否かを判断しろ。

問題II′（分類問題）$\mathcal{C}_X$に対し、又は、その subclasses に対し、同型類を分類せよ。

問題III（素因子性問題）$(G, \varphi) \in \mathcal{C}_X$に対し、それが、与えられた$\mathcal{C}_X$の subclass Eで prime か否かを判定せよ。

問題III′（素因子分類問題）$\mathcal{C}_X$とその subclass Eに対し、Eで prime な$\mathcal{C}_X$の pair を分類せよ。

問題IV（素因子分解の存在性問題）$(G, \varphi) \in \mathcal{C}_X$と$\mathcal{C}_X$の部分 class Eに対し、$(G, \varphi) \in E$の素因子分解が存在するか。

問題V（素因子分解の比較問題）$(G, \varphi) \in \mathcal{C}_X$の subclass Eに関する2つの素因子分解が与えられたとき、

それらを比較せよ。

問題 V′（唯一性問題） $(G,\varphi) \in C_X$ と subclass E （$(G,\varphi) \in E$）に対し、(G,φ) の E に関する素因子分解は唯一であるか。

（注意）一般には唯一ではない。

問題 V″（一般比較問題） $(G,\varphi) \in C_X$，$(G,\psi) \in C_Y$ に対し、それぞれの C_X, C_Y に関する素因子分解を比較せよ。

これら5種9つの問題をここでは基本問題と名付けることにする。 自由積の場合、I は 語の問題、II は 同型問題、IV は、Wagner-Grushko-Neumann の定理より肯定的、V は 一般化された Nielsen 変換の話しとなる。

証明は省略するが、比較問題に関して、次の定理が Karrass-Solitar の部分群定理（[5]）より示せた：

定理1.20（組分定理）　$(G,\varphi)\in\mathcal{C}_x$ の素因子分解

$$(G,\varphi)=(A_1,\varphi_1)*\cdots*(A_m,\varphi_m)$$
$$=(B_1,\psi_1)*\cdots*(B_n,\psi_n)$$

に対し、A_p, B_q の樹積又は、樹積のHNN拡大としての表現で、A_p の頂点に対応する群の p 全体に渡る族と、B_q の、頂点に対応する群の q 全体に渡る族との間に、全単射な対応があって、それぞれ対応する群が同型になるものが存在する。m, n は一般には等しくない。

この定理の系として［3］, Theorem 2.2.7, (3) が証明される。i.e. knot-like groups と呼ばれる class に対し、分解の唯一性が示せる。

講演2 Star Decompositions of Groups along Splitting Cyclic Groups

我々は、結び目群の pair（定義3.　）を含むものとして、次の様な $C_{\mathbb{Z}}$ の部分半群

$$C = \{ (G, \varphi) \in C_{\mathbb{Z}} \mid \begin{array}{l} (1)\ G \text{ は、有限表示、} \\ (2)\ G/[G,G] \cong \mathbb{Z} = \langle t : \rangle \\ (3)\ \varphi(1)[G,G] \text{ は } G/[G,G] \text{ を生成する} \end{array} \}$$

について、前講演での基本問題を考える。これについては、以前［3］において述べたが、Existence Problem に関しては、証明が不十分であったので、次の唯一性定理、存在定理のうち、存在の方を証明する。

存在定理 2.1　C は completely closed で、任意の C の pair は、素因子分解をもつ。

唯一性定理 2.2　C の任意の pair の素因子分解は、唯一である。

§ 2.1　存在定理の証明

群拡大の立場から $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ を見ると、

$$1 \longrightarrow [G,G] \longrightarrow G \overset{\varphi}{\leftrightarrows} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は、splitting extension となっている。そこで、G の交換子群 $[G,G]$ と、積 $*$ の関係については、次が基本的である。

<u>定理</u> 2.3 ([3], Prop. 2.1.4) (Note 1.17)

$(G_1,\varphi_1), (G_2,\varphi_2)\in\mathcal{C}$ に対し、$(G,\varphi)=(G_1,\varphi_1)*(G_2,\varphi_2)$ ならば、$[G,G]=[G_1,G_1]*[G_2,G_2]$（自由積）である。

準定理 2.4 ([3], Theorem 2.2.7.(2))

$\mathcal{C}$ は、completely closed である。

次に、任意の pair $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ に対し、G は次の様な HNN 拡大と見ることが出来る。

<u>定理</u> 4.5　任意の $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ に対し、G は、$\varphi(1)$ を、

free part の生成元とし、有限生成群を base group とする HNN 拡大となっている。

証明。G の有限表示の1つを

$$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, x_2, \cdots, x_p \,;\, R_1(x_\nu), R_2(x_\nu), \cdots, R_q(x_\nu) \rangle$$

とする。$W(x_\nu)$ を、$x_1, x_2, \cdots, x_p$ の語で、$\varphi(1)$ を表わすものとする。$\mathcal{P}_1$ に、generating symbol x を、defining relator $xW(x_\nu)^{-1}$ と共に加え、G の表示

$$\mathcal{P}_2 = \langle x, x_1, x_2, \cdots, x_p \,;\, R_1(x_\nu), R_2(x_\nu), \cdots, R_q(x_\nu), xW(x_\nu)^{-1} \rangle$$

を得る。α を、G から $G/[G,G] = \langle t : \rangle$ への、abelianizer で、$\alpha(x) = t$ となるものとする。すると、各 $\nu = 1, 2, \cdots, p$ に対し、$\alpha(x_\nu) = t^{\alpha_\nu}$ を得る。そこで、$\mathcal{P}_2$ に、generating symbol a_ν と defining relation

$$(2.6) \qquad a_\nu = x_\nu x^{-\alpha_\nu}$$

を加え、次に、(2.6) を $x_\nu = a_\nu x^{\alpha_\nu}$ と変え、これを使って、generating symbol x_ν を消去することにより、

$$\mathcal{P}_3 = \left\langle x, a_1, a_2, \cdots, a_p \,;\, R_1(a_\nu x^{\alpha_\nu}), R_2(a_\nu x^{\alpha_\nu}), \cdots, R_q(a_\nu x^{\alpha_\nu}), \; xW(a_\nu x^{\alpha_\nu})^{-1} \right\rangle$$

を得る。$R_\lambda(a_\nu x^{\alpha_\nu})$，$xW(a_\nu x^{\alpha_\nu})^{-1}$ をそれぞれ、単に R_λ, R_{q+1} で表わすこととする。今、$R_{\lambda'}$，$1\leqq\lambda'\leqq q+1$，が、$C_{\lambda'1}^{\varepsilon_{\lambda'1}}\, C_{\lambda'2}^{\varepsilon_{\lambda'2}}\cdots C_{\lambda' r_{\lambda'}}^{\varepsilon_{\lambda' r_{\lambda'}}}$，ここに $C_{\lambda'j}$ は、generating symbol x, a_ν の1つ、$\varepsilon_{\lambda'j}=\pm1$，であるならば、$b_{\lambda'j}=C_{\lambda'1}^{\varepsilon_{\lambda'1}}\cdots C_{\lambda'j}^{\varepsilon_{\lambda'j}}$，$j=1,2,\cdots,r_{\lambda'}$，とし、$C^{*}_{\lambda'j}$ を、$C_{\lambda'j}$ が a_ν の中であれば、$x^{\sigma_x(b_{\lambda'j-1})}\, C_{\lambda'j}\, x^{-\sigma_x(b_{\lambda'j-1})}$，$C_{\lambda'j}$ が x ならば、1 と定める。但し，$b_{\lambda'0}=1$ と考える。また、$\sigma_x(b_{\lambda'j-1})$ は、$b_{\lambda'j-1}$ 中の x の index sum である。一方、$\alpha(x)=t$，$\alpha(a_\nu)=\alpha(x_\nu x^{-\alpha_\nu})=t^{\alpha_\nu}t^{-\alpha_\nu}=1$ であるから、$R_{\lambda'}=C_{\lambda'1}^{*\varepsilon_{\lambda'1}}\, C_{\lambda'2}^{*\varepsilon_{\lambda'2}}\cdots C_{\lambda' r_{\lambda'}}^{*\varepsilon_{\lambda' r_{\lambda'}}}$。次に、$m=\min\limits_{\lambda'}\min\limits_{1\leqq j\leqq r_{\lambda'}}(\sigma_x(b_{\lambda'j}))$ $M=\max\limits_{\lambda'}\max\limits_{1\leqq j\leqq r_{\lambda'}}(\sigma_x(b_{\lambda'j}))$ とする。ここで、$\mathcal{P}_3$ の、generating symbol に $a_{\nu k}$，$1\leqq\nu\leqq p$，$m\leqq k\leqq M+1$，を、defining relator に $a_{\nu k}x^k a_\nu^{-1}x^{-k}$ を加える。そして、$a_{\nu k}x^k a_\nu^{-1}x^{-k}$ を使って、$R_{\lambda'}$ を全て $a_{\nu k}$ の語に変える。その後、$a_{\nu k'}x^{k'}a_\nu^{-1}x^{-k'}$，$m+1\leqq k'\leqq M+1$，を、順次、$a_{\nu k'}\,x\,a_{\nu k'-1}^{-1}x^{-1}$ に変える。最後に、$a_{\nu m}x^m a_\nu^{-1}x^{-m}$ を使って、a_ν を generating symbol から消去する。この様にして得られたGの表示は、明らかに、Gが、$a_{\nu k}$，$1\leqq\nu\leqq p$，$m\leqq k\leqq M+1$，で生成される群を base group として、x を（すなわち，$\varphi(1)$を），free part の生成元とするHNN拡大であることを表わしている。//

となる。そこで、次の事実に注意する.

(2.11) 任意の $(X, \rho) \in C$ と、有限生成部分群 $H \le [X, X]$ に対し、$\tilde{X} = X/H^X$, H^X は H の X に於ける正則閉包、とすると、$(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ は C の元である。但し、$\tilde{\rho}$ は、自然な全準同型写像 $X \longrightarrow \tilde{X}$ によって ρ から自然に導びかれる準同型写像である.

(2.12) $(X, \rho) \in C$ に associate した X の HNN 拡大としての表示 (定理 2.5) を、

$$\langle x, S : xAx^{-1} = B \rangle$$

とし、H を S の有限生成部分群とする。このとき、補題 2.11 で考えた $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ に associate した HNN 拡大としての $\tilde{X}$ の表示として.

$$\langle x, \tilde{S} : x\tilde{A}x^{-1} = \tilde{B} \rangle$$

が取れる。こゝに、$\tilde{S}, \tilde{A}, \tilde{B}$ は、それぞれ S, A, B の、全準同型写像 $X \to \tilde{X}$ による像である。

(これらの証明は自明であろう。)

注1. associated subgroupも有限生成でとれている。
注2. base group は、決して有限表示になれない場合もある。

以上の準備のもとに、証明にはいろう。そこで、定理2.1が成立しなかったとする。すると、Cの素因子分解をもたないpairが少なくとも1つ存在する。そこで、pairの、定理2.5の意味でのHNN拡大としての全ての構造を、Cの素因子分解をもたないpair全てにわたり考え、その中で、base groupの階数の最小Nを与えるHNN拡大としての構造の1つを

$$(2.7)\ \mathcal{P} = \langle x, S \ ;\ xAx^{-1} = B \rangle$$

とし、これを与えるpairを(G,φ)とする。i.e. $\mathcal{P}$はGの表示で、xは$\varphi(1)$を表わし、base group S の階数 $\mathrm{rank}\, S = N$ である。

補題2.7　Sは、階数Nの自由群である。

証明. (G,φ)は素因子分解をもたない。よって、(G,φ)は既約でないから、$(G,\varphi) = (X_1,\varphi_1) * (Y_1,\psi_1)$、

$(X_1,\varphi_1)\not\cong(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$, $(Y_1,\psi_1)\not\cong(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$、と分解できる。すると、$(X_1,\varphi_1)$か$(Y_1,\psi_1)$の少なくとも一方は、素因子分解をもたない。$(Y_1,\psi_1)$がそうであるとする。$(Y_1,\psi_1)$に上記と同じ議論を行うということをくり返すことにより、正の各整数nに対し、(G,φ)の分解

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad (G,\varphi) &= (X_n,\varphi_n) * (Y_n,\psi_n),\\
(X_n,\varphi_n) &= (X_{n-1},\varphi_{n-1}) * (X_n^*,\varphi_n^*) \quad (\text{但し } n\geqq 2),\\
(Y_n,\psi_n) &= (X_{n+1},\varphi_{n+1}) * (Y_{n+1},\psi_{n+1}),
\end{aligned}
$$

が存在する。$(X_n^*,\varphi_n^*)\not\cong(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$である。すると、定理2.3より、$[G,G]=[X_n,X_n]*[Y_n,Y_n]$。$S\leq[G,G]$は明らかであるから、$S$に、Kuroshの部分群定理を適用することにより、

$$
(2.9)\qquad S = F_u * \left(\mathop{*}_{\xi}(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})\right) * \left(\mathop{*}_{\mu}(S\cap[Y_n,Y_n]^{h_\mu})\right)
$$

F_uは階数uの自由群$(u\leq N)$, $g_\xi, h_\mu\in G$。

また、Wagner, Groshko, Neumann の定理により、

$$
\begin{aligned}
(2.10)\qquad N = u &+ \sum_{\xi}\operatorname{rank}(S\cap[X_n,X_n]^{g_\xi})\\
&+ \sum_{\mu}\operatorname{rank}(S\cap[Y_n,Y_n]^{h_\mu})
\end{aligned}
$$

これより、まず次が分かる。

(2.13) 任意のnに対し、$S \cap [X_n, X_n]^{g_\xi} = 1$.

なんとならば、或るnとg_ξに対し、$S \cap [X_n, X_n]^{g_\xi} \neq 1$ならば、(2.10)より、$\mathrm{rank}(S \cap [X_n, X_n]^{g_\xi})$は有限であるから、$\tilde{G} = G/(S \cap [X_n, X_n]^{g_\xi})^G$は、(2.12)により表示

(2.14) $\langle x, S\ ;\ xAx^{-1} = B,\ (S \cap [X_n, X_n]^{g_\xi})$の生成え$\rangle$

を持つ。よって、$\tilde{G}$の表示として

$$\langle x, \tilde{S}\ ;\ x\tilde{A}x^{-1} = \tilde{B} \rangle \quad , \quad \tilde{S} = S/(S \cap [X_n, X_n]^{g_\xi})^S$$

が得られる。すると、(2.9)より、$\mathrm{rank}\,\tilde{S} \lneqq \mathrm{rank}\,S$ また、$(\tilde{G}, \tilde{\rho}) \in C$となり、$\mathrm{rank}\,S$の最小性に反する。

更に、

(2.15) $\exists m \quad \forall n > m \qquad S \cap [Y_n, Y_n]^{h_\mu} = 1$

∵ $\forall n \quad S \cap [Y_n, Y_n]^{h_\mu} \neq 1$があれば、その正規部分群で(2.12)のように$G$の剰余群を取れば、

$\operatorname{rank}(S \cap [Y_n, Y_n]^{h_n}) < \infty$ より、$\operatorname{rank} S$ の最小性に反する $\mathcal{C}$ で分解をもたないものがつくれる。

よって、ある適当に大きな n に対し，(2.9) は．$S = F_n$ となり補題は証明された。

補題 2.16 $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle =$ 自由群

∵ $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle \cong \underset{B=xAx^{-1}}{S * (xSx^{-1})}$ となる。この点に注意して，$\langle S \cup xSx^{-1} \rangle$ を自由積 $[X_n, X_n] * [Y_n, Y_n]$ の部分群とみて Kurosh 部分群定理を用い、その各自由積の~~部~~意味の素因子に対し，$\underset{B=xAx^{-1}}{S * (xS^{-1}x^{-1})}$ の部分群として Karrass-Solitar 部分群定理を用いれば、(2.13), (2.15) の条件より．この補題の結果が出る。

$\mathcal{C}$ に属する (G, φ) の条件 (2) より．$G/[G,G]$ の簡単な計算より．

(2.17) $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle = (\operatorname{rank} N$ の自由群$)$.

この議論をくり返すことにより．

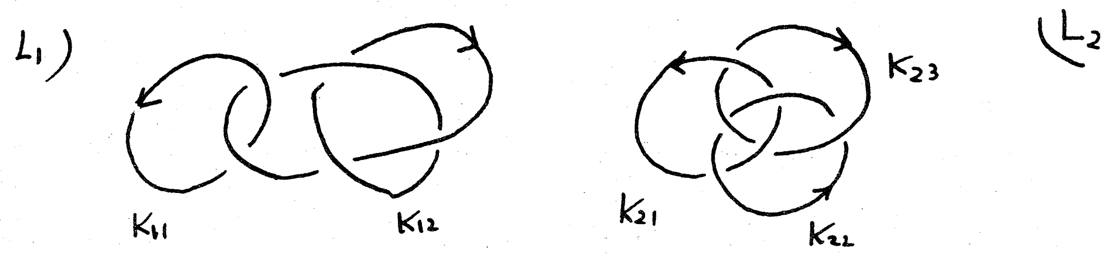
(2.18) $\langle S \cup xSx^{-1} \cup \cdots \cup x^k S x^{-k} \rangle = (\operatorname{rank} N$

の自由群）　$\forall k < \infty$

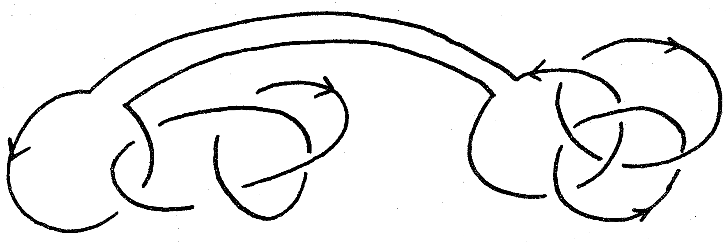
が示せる。よって，(X_n, φ_n) に対し定理4.5を用い HNN 拡大で，有限生成な base group，例えば S_x，をもつものとする。すると，或る十分大きな k' に対し $S_x < (S \cup xSx^{-1} \cup \cdots \cup x^{k'}Sx^{-k'})$ になっていると見てよい。そこで，再び，(G, φ) を $(S \cup xSx^{-1} \cup \cdots \cup x^{k'}Sx^{-k'})$ の HNN 拡大と見て，$H = S_x$ として，(2.12) を用いれば，N の最小 rank 性に反した C の pair がつくれることとなり矛盾。よって，存在定理は証明された。

講演3 Existence of Factorizations for Links & Surfaces

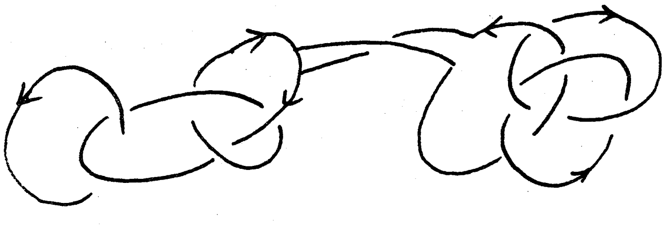
3次元球面 S^3 中の向きのついた順な絡み目 $L_1 = K_{11} \cup \cdots \cup K_{1p}$, $L_2 = K_{21} \cup \cdots \cup K_{2q}$ に対し、『積』が、結び目の積の拡張として定義される([7])。簡単に例で示そう。



$(L_1 ; K_{11}) \# (L_2 ; K_{21})$ は.



$(L_1 ; K_{12}) \# (L_2 ; K_{21})$



この積に対し、逆に分解が自然に定義されるが、それに関しては、よく知られた次の定理がある：

定理 3.1（Shubert [6], Hashizume [7]）
順な有向絡み目の分解は有限回で終り、分解しきれない素な絡み目まで分解した素因子分解は唯一である。

詳しいことは省略するが、我々の定理 2.1 と torus 分解に関する T.P. Sharlen の結果（[8], Lemma 2.7）を用いれば、この古典的に重要な結果が、Kneser の予想の証明同様に証明される。

//

定理 3.2　この絡み目の積は、自由可換半群をなす。

＝

講演4 Group of Knot Groups

n次元の順な結び目は、合成のもとで、(自由な)可換半群を形成する(定理3.2)。L.P. Neuwirth は、著書『Knot Groups』に於て、この半群に、或る合同関係を定め、n次元結び目群の群なるものを定義した。本講演では、この群の構造を完全に決定する。

定理4.1 全ての正の整数nに対し、n次元結び目群の群は、可算無限次元の自由可換群である。

これは、[9] 中の problem I (1次元結び目群の群は、自明でない群か)に、肯定的に答えている。

§4.1 結び目群の群 ([9], Chap.VIII, §4 & §7)

この章では、L.P. Neuwirth の「群の群」([9], §3 & §4)を、講演2で取り扱ったpairの集り$\mathcal{G}$の或る性質を満たすsubclassに対し、定義、紹介する。さらに、この場合には、強い意味での群の群が定義できることを示す。特別な場合として、結び目群の群が最

後に定義される。

$\mathcal{D}$を、$\mathcal{C}$の subclass で、次の条件を満たすものとする：

（条件１）　$(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}) \in \mathcal{D}$,

（条件２）　$(G, \varphi) \in \mathcal{D} \Rightarrow (G, \varphi \circ \iota) \in \mathcal{D}$,

ここに、ι は、$\mathbb{Z}$上の *involution* である。*i.e.* $\iota(1) = -1$ 。

<u>定義</u> 4.2　$\mathcal{D}$の元の間の関係 $\mathfrak{r}$ （*resp.* $\mathfrak{s}$ ）を次で定める：

$(G, \varphi)\ \mathfrak{r}\ (K, \psi)$ （*resp.* $(G, \varphi)\ \mathfrak{s}\ (K, \psi)$）とは、群 $\underset{\varphi(1)=\psi(-1)}{G * K}$ の自己同型写像（*resp.* *involution*）で、その部分群 $\varphi(\mathbb{Z})$ 上の *involution* を誘導するものが存在することである。

<u>Remark</u> 4.3　定義 4.2 は、*well-defind* である。

<u>Claim</u> 4.4　$(G, \varphi)\ \mathfrak{s}\ (K, \psi) \Rightarrow (G, \varphi)\ \mathfrak{r}\ (K, \psi)$。

<u>Claim</u> 4.5 ([9], p.78) $(G, \varphi) * (G, \varphi \circ \iota)\ \mathfrak{s}\ (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$。

関係 $\mathfrak{r}$ (同様に, $\mathfrak{s}$) が、合同関係のうち、*transitivity* 以外を満たすことは、明らかである。関係 $\mathfrak{r}$ を *transitive* なものにかえる為に、次の関係 $\equiv_{\mathcal{D}}$ が、L.P. Neuwirth によって導入された。

<u>定義</u> 4.6　$\mathcal{D}$ の元、(G, φ) と (K, ψ) が、$(G, \varphi) \equiv_{\mathcal{D}} (K, \psi)$ (*resp.* $(G, \varphi) \natural_{\mathcal{D}} (K, \psi)$) とは、

$$(G, \varphi)\, \mathfrak{r}\, X_1\, \mathfrak{r} \cdots \mathfrak{r}\, X_N\, \mathfrak{r}\, (K, \psi)$$
$$(\textit{resp.}\quad (G, \varphi)\, \mathfrak{s}\, X_1\, \mathfrak{s} \cdots \mathfrak{s}\, X_N\, \mathfrak{s}\, (K, \psi))$$

なる $X_1, \cdots, X_N \in \mathcal{D}$, $N < \infty$, が存在することである。

<u>準定理</u> 4.7

(1) $\mathcal{D} / \natural_{\mathcal{D}}$ は、可換群である,

(2) $\mathcal{D} / \equiv_{\mathcal{D}}$ は、$\mathcal{D} / \natural_{\mathcal{D}}$ の商群である。

証明) (1) [9]、*Theorem* 8.4.1 の証明に準ずる。

(2) *Claim* 4.3 より明らか。 //

これらの群 $\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ 及び $\mathcal{D}/\rho_{\mathcal{D}}$ を、それぞれ、$\mathcal{D}$の群、及び、強い意味での$\mathcal{D}$の群と呼ぶことにする。

n次元結び目のpairの集り$\mathcal{K}_n$は、明らかに、条件1、2を満たす$\mathcal{C}$のsubclassである（[9], Chap.VIII, §7）から、$\mathcal{K}_n$の群、強い意味での$\mathcal{K}_n$の群が定義される。それぞれ、n次元結び目群の群、強い意味でのn次元結び目群の群と呼ぶ。

次の3つの結果は、L.P. Neuwirthによる：

定理 4.8（[9], Theorem 8.7.1）$(G,\varphi)\in\mathcal{K}_1$に対し、

$(G,\varphi)\equiv(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}) \Rightarrow$ GのAlexander多項式は、symmetric。

系 4.9（[9], Corollary 8.7.1）$(G,\varphi),(K,\psi)\in\mathcal{K}_1$に対し、$(G,\varphi)\equiv(K,\psi)$ならば、$\underset{\varphi(1)=\psi(-1)}{G * K}$のAlexander多項式は、symmetric。

系 4.10（[9], Corollary 8.7.2）Alexander多項式を持つ2次元結び目のpairの全ての集りは、条件1,2を満たす$\mathcal{C}$のsubclassで、その群は、自明でない。

§ 4.2 関係 $\equiv$ と $\natural$ の素因子分解による特徴付け

この章では、次の定理を証明することを、主目的とする。

<u>定理</u> 4.11 $\mathcal{D}$ を、$\mathcal{C}$ の任意な *closed subclass* で、条件 1 と 2 を満たすものとする。このとき、次が成立：

(1) $(G,\varphi),(K,\psi)\in\mathcal{D}$ に対し、

$$(G,\varphi)\equiv_{\mathcal{D}}(K,\psi)\Leftrightarrow(G,\varphi)\,\Upsilon\,(K,\psi)$$

$$(G,\varphi)\natural_{\mathcal{D}}(K,\psi)\Leftrightarrow(G,\varphi)\,\S\,(K,\psi)。$$

(2) $\mathcal{D}$ の群は、自由可換群である。

(2′) 強い意味での $\mathcal{D}$ の群は、$\mathcal{D}$ の群と、幾つかの位数 2 の巡回群の直和である。

証明は、次の関係 Υ と $\S$ の、pair ($\in\mathcal{C}$) の素因子分解による特徴付けに基づく。

<u>特徴付け補題</u> 4.12 任意の $(G,\varphi)\in\mathcal{C}$ に対し、

(i) $(G,\varphi)\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ となる為の必要十分条件は、(G,φ) が、同型の意味で、次の様な $\mathcal{C}$ での素因子分

解を持つことである：

$$(4.13)\qquad \Big[\mathop{\ast}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i)\Big] \ast \Big[\mathop{\ast}_{j=1}^{q}\big((B_j,\beta_j)\ast(B_j,\beta_j\circ\iota)\big)\Big],$$

ここに、$(A_i,\alpha_i)\ \mathcal{I}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$, $i=1,\cdots,p$, であり、

$(B_j,\beta_j)\ \mathcal{I}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない, $j=1,\cdots,q$ 。

(ii) $(G,\varphi)\ \mathcal{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$となる為の必要十分条件は、$(G,\varphi)$が、同型の意味で、次の様な$G$での素因子分解を持つことである：

$$(4.14)\qquad \Big[\mathop{\ast}_{i'=1}^{p'}(A'_{i'},\alpha'_{i'})\Big] \ast \Big[\mathop{\ast}_{i''=1}^{p''}\big((A''_{i''},\alpha''_{i''})\ast(A''_{i''},\alpha''_{i''}\circ\iota)\big)\Big]$$

$$\ast\Big[\mathop{\ast}_{j=1}^{q}\big((B_j,\beta_j)\ast(B_j,\beta_j\circ\iota)\big)\Big],$$

ここに、$(A'_{i'},\alpha'_{i'})\ \mathcal{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$, $i'=1,\cdots,p'$, であり、$(A''_{i''},\alpha''_{i''})\ \mathcal{I}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$、かつ $(A''_{i''},\alpha''_{i''})\ \mathcal{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない、$i''=1,\cdots,p''$、$(B_j,\beta_j)\ \mathcal{I}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$でない（よって、$(B_j,\beta_j)\ \mathcal{S}\ (\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない）, $j=1,2,\cdots,q$。

<u>注意</u>。明らかに、

$$\mathop{*}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i)=\Big[\mathop{*}_{i'=1}^{p'}(A'_{i'},\alpha'_{i'})\Big]*\Big[\mathop{*}_{i''=1}^{p''}((A''_{i''},\alpha''_{i''})*(A''_{i''},\alpha''_{i''}\circ\iota))\Big]。$$

<u>(i)の証明</u>。 *Claim* 4.4 と *Claim* 4.5 より、十分性は明らか。必要性を証明する。(G,φ) の $\mathcal{C}$ での素因子分解を、

$$(4.15)\quad \Big[\mathop{*}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i)\Big]*\Big[\mathop{*}_{j'=1}^{q'}(B_{j'},\beta_{j'})\Big]$$

とする。ここに、$(A_i,\alpha_i)\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ (i.e. $(A_i,\alpha_i)\cong(A_i,\alpha_i\circ\iota)$), $i=1,\cdots,p$, であり、$(B_{j'},\beta_{j'})\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ でない (i.e. $(B_{j'},\beta_{j'})\not\cong(B_{j'},\beta_{j'}\circ\iota)$), $j'=1,\cdots,q'$。すると, $(G,\varphi\circ\iota)$ の $\mathcal{C}$ での素因子分解は、

$$\Big[\mathop{*}_{i=1}^{p}(A_i,\alpha_i\circ\iota)\Big]*\Big[\mathop{*}_{j'=1}^{q'}(B_{j'},\beta_{j'}\circ\iota)\Big]$$

である。今、$(G,\varphi)\,\Upsilon\,(\mathbb{Z},id_{\mathbb{Z}})$ であるから、$(G,\varphi)\cong(G,\varphi\circ\iota)$。$\mathcal{C}$ の素因子分解唯一性定理により、各 $(B_{j'},\beta_{j'})$ に対し, これに同型な $(B_k,\beta_k\circ\iota)$ が 1 対 1 に定まる。これは、関係 Υ が、同型で不変な性質 (*Remark* 4.3) であることから、$(A_i,\alpha_i\circ\iota)$ の因子には、対応しないことによる。さらに、$(B_{j'},\beta_{j'})\not\cong(B_{j'},\beta_{j'}\circ\iota)$ より、$j'\neq k$。この様な、j' を k に対応させる $\{1,2,\cdots,q'\}$ 上の置換を、T とする。T の巡環への分解 $(\nu_1^{(1)},\nu_2^{(1)},\cdots$

$\cdot, \nu'^{(1)}_{m_1}) \cdot\cdot\cdot\cdot (\nu^{(t)}_1, \nu^{(t)}_2, \cdots, \nu^{(t)}_{m_t})$ を考えると、$m_1, \cdots,$ m_t は全て、偶数でなければならない。なんとならば、

$$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_3^{(s)}}, \beta'_{\nu_3^{(s)}}) \cong \cdots$$

$$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota) \cong (B'_{\nu_2^{(s)}}, \beta'_{\nu_2^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_4^{(s)}}, \beta'_{\nu_4^{(s)}}) \cong \cdots$$

となり、m_s が奇数ならば、$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota)$ となって、矛盾！ よって、

$$\mathop{\ast}_{j'=1}^{q'} (B'_{j'}, \beta'_{j'}) \cong \mathop{\ast}_{s=1}^{t} \Big(\mathop{\ast}_{u=1}^{\frac{m_s}{2}} \big((B'_{\nu_{2u-1}^{(s)}}, \beta'_{\nu_{2u-1}^{(s)}}) \ast (B'_{\nu_{2u}^{(s)}}, \beta'_{\nu_{2u}}) \big) \Big)$$

$$\cong \mathop{\ast}_{s=1}^{t} \Big(\mathop{\ast}^{\frac{m_s}{2}} \big((B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \ast (B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota) \big) \Big)$$

となり、(4.15) より、(4.13) が得られる。

<u>(ii) の証明</u>。Claim 4.5 より、十分性は明らか。よって、必要性を証明する。Claim 4.4 と (i) より、(G, φ) $\not\cong (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ならば、(4.13) のような素因子分解を、(G, φ) は、$\mathcal{C}$ で持つことになる。そこで、

(4.16) $$\mathop{\ast}_{i=1}^{p} (A_i, \alpha_i) \cong \Big[\mathop{\ast}_{i'=1}^{p'} (A_{i'}, \alpha_{i'}) \Big] \ast \Big[\mathop{\ast}_{i''=1}^{p''} \big((A''_{i''}, \alpha''_{i''}) \ast (A''_{i''}, \alpha''_{i''} \circ \iota) \big) \Big]$$

を示せば良い訳である。証明は、(i) の場合に似ている。$\mathop{\ast}_{i=1}^{p} (A_i, \alpha_i)$ という素因子分解を、並びかえて、

$$\left[\mathop{*}_{i'=1}^{p'}(A'_{i'},\alpha'_{i'})\right] * \left[\mathop{*}_{i'''=1}^{p'''}(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})\right]$$

ここに、$(A'_{i'},\alpha'_{i'}) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ (i.e. involution によって、$(A'_{i'},\alpha'_{i'}) \cong (A'_{i'},\alpha'_{i'}\circ\iota)$), $i'=1,\cdots,p'$, であり、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ は、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}) \wr (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではあるが、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ でない (i.e. $(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}) \cong (A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}\circ\iota)$ ではあるが、これは、involution では、導かれない), $i'''=1,\cdots,p'''$, とする。今、$(G,\varphi) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ であるから、群 G の involution ξ で、$\xi\circ\varphi = \varphi\circ\iota$ となるものが存在する。(i)のとき同様，Remark 4.3 により、C の素因子分解唯一性定理において、$(A'_{i'},\alpha'_{i'})$ に対応するのは、何か $(A'_{l'},\alpha'_{l'})$ であり，$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ に対応するのは、$(A'''_{l'''},\alpha'''_{l'''})$ であり，さらに，(B_j,β_j) に対応するのは、$(B_j,\beta_j\circ\iota)$ である。但し，ξ で，写像されるというのではなく、対応するというだけである。そこで、準定理 2. により、ξ より、$\mathop{*}_{i'''=1}^{p'''}(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ から $\mathop{*}_{i'''=1}^{p'''}(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}\circ\iota)$ への、involution $\bar{\xi}$ が導かれる。このとき、$\bar{\xi}$ が導く対応は、ξ のものに等しい。さらに、i''' に対応する l''' は、$i'''\neq l'''$ となる。なんとならば、もし $l'''=i'''$ ならば、再び準定理 2. より、$(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''})$ から $(A'''_{i'''},\alpha'''_{i'''}\circ\iota)$ への involution $\bar{\bar{\xi}}_{i'''}$ が

ξ (又は、ξ) から導かれる。よって、($A'''_{i'''}$, $\alpha'''_{i'''}$) $\mathrel{\$}$ ($\mathbb{Z}$, $id_{\mathbb{Z}}$) となり矛盾する。このことと、ξ が involution であることにより、$\bar{\xi}$ から導かれる $\{1, 2, \cdots, p''\}$ 上の置換の巡環への分解は、互換の積となる。よって、(i) の場合同様、(4.16) が示せる。//

素因子分解定理により、C の各元 (G, φ) の素因子分解において、(4.13) 又、(4.14) の形の最大の部分(素因子分解)がとれる。それぞれにおける、(G, φ) の素因子分解の残りの部分を、$S(G, \varphi)$, $T(G, \varphi)$ で書き表わすことにする。$(G, \varphi) \mathrel{\Upsilon} (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) * (K, \psi \circ \iota) \mathrel{\Upsilon} (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$、また、$(G, \varphi) \mathrel{\$} (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) * (K, \psi \circ \iota) \mathrel{\$} (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ であるから、補題 4.12 より、次の系を得る。

<u>系</u> 4.17 (i) $(G, \varphi) \mathrel{\Upsilon} (K, \psi) \Leftrightarrow S(G, \varphi) \cong S(K, \psi)$、
(ii) $(G, \varphi) \mathrel{\$} (K, \psi) \Leftrightarrow T(G, \varphi) \cong T(K, \psi)$。

よって、定理 4.11.(1) は、明らかである。また、同定理の (2) は、この (1) と、系 4.17, C の素因子分解の唯一性定理から直ちに導かれる。さらに、(2') は、

$(A_{i'''}^{'''}, \alpha_{i'''}^{'''}) * (A_{i'''}^{'''}, \alpha_{i'''}^{'''}) \cong (A_{i'''}^{'''}, \alpha_{i'''}^{'''}) * (A_{i'''}^{'''}, \alpha_{i'''}^{'''} \circ \iota)$

と、*Claim* 4.5 より明らかである。

<u>*Claim*</u> 4.18　(1)　$\mathcal{C}$の群は、既約な$(G, \varphi) \in \mathcal{C}$で、$(G, \varphi) \not\cong (G, \varphi \circ \iota)$なるもの全ての集りを基底としてもつ自由可換群である。　(2)　強い意味での$\mathcal{C}$の群は、$\mathcal{C}$の群と、既約な$(G, \varphi) \in \mathcal{C}$で、$(G, \varphi) \cong (G, \varphi \circ \iota)$かつ、この同型が*involution*では与えられないものが生成する位数2の巡回群等との直積である。

以後、(*resp.* 強い意味での)$\mathcal{D}$の群$\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ (*resp.* $\mathcal{D}/\#_{\mathcal{D}}$)を、$\mathcal{D}/\mathfrak{r}$ (*resp.* $\mathcal{D}/\mathfrak{s}$)で表わす。

<u>準定理</u> 4.19　$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$を、$\mathcal{C}$の任意な*subclass*で、条件1，2を満たす*closed*なものとする。このとき、

(1) $\mathcal{D}_1/\mathfrak{r}$ (*resp.* $\mathcal{D}_1/\mathfrak{s}$)は、$\mathcal{C}/\mathfrak{r}$ (*resp.* $\mathcal{C}/\mathfrak{s}$)中の$\mathcal{D}_1$の像に同型である。

(2) $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_1/\mathfrak{r} \geq \mathcal{D}_2/\mathfrak{r}$ 且 $\mathcal{D}_1/\mathfrak{s} \geq \mathcal{D}_2/\mathfrak{s}$。

証明は、定理4.11.(1)より明らか。

n次元結び目群の群に関しては、次が言える。

<u>準定理</u>4.20　任意の$n \geqq 3$に対し、

(1)　$K_1/\mathfrak{r} < K_2/\mathfrak{r} < K_n/\mathfrak{r} = K_{n+1}/\mathfrak{r} < C/\mathfrak{r}$、

(2)　$K_1/\mathfrak{s} < K_2/\mathfrak{s} < K_n/\mathfrak{s} = K_{n+1}/\mathfrak{s} < C/\mathfrak{s}$。

<u>証明</u>。準定理3.　及び準定理4.19.(2)より、

$$K_1/\mathfrak{r} \leq K_2/\mathfrak{r} \leq K_n/\mathfrak{r} = K_{n+1}/\mathfrak{r} \leq C/\mathfrak{r}$$

$$K_1/\mathfrak{s} \leq K_2/\mathfrak{s} \leq K_n/\mathfrak{s} = K_{n+1}/\mathfrak{s} \leq C/\mathfrak{s} \qquad (n \geqq 3)$$

系4.10より、$K_1/\mathfrak{s} \neq K_2/\mathfrak{s}$。[3]、*Example* 2、(2)より、$K_2/\mathfrak{s} \neq K_3/\mathfrak{s}$（*F. Hosokawa* - *A. Kawauchi* [10]又は、Farber [11]を用いる）。また、[12], [13], [14], より、$K_3/\mathfrak{s} \neq C/\mathfrak{s}$。故に、(2)が成り立つ。このことより、(1)が成り立つことは明らか。//

§4.3 定理4.1の証明

定理4.8、系4.9は、1次元結び目群の*Alexander*多項式が*symmetric*なことから役に立たない。そこで、もとにもどって、定理4.11.(2)及び*Claim* 4.18.(1)、準定理4.19.(1) & (2)、準定理4.20より、1次元結び目に関した無限個の異った*pair*（G, φ）で、Cで既約、

且つ、$(G,\varphi) \not\cong (G,\varphi\circ\iota)$ となるものがあることを示せばよい。これは、定理5.1で証明する。(但し、そこで扱われる例は、Witten, Ziemamman等の torus 分解に関した、結び目の分解に対する結果からもすぐに証明される。)

講演5　A Note on Groups of Composite Knots

granny knot と square knot との例([　])から、Prof. J. Martine が、1983年に、Univ. of Saskatchwan で、私的に、次の問いをされた。

問題　4つの1次元結び目 k_1, k_1', k_2, k_2' に対し、次が成立するか。

$G(k_1) \cong G(k_1')$ 且つ $G(k_2) \cong G(k_2')$ ならば、

$$G(k_1 \# k_2) \cong G(k_1' \# k_2')。$$

次の定理が、本講演でのべる、そのときの否定的答えである。

定理5.1　任意の整数 $p \neq -2, -1, 0, 1$ に対し、$k(p)$ を、$(2p+1, 3, -3)$ 型の pretzel knot とする。このとき、

$$G(k(p) \# k(p)) \not\cong G(k(p) \# k(-p-1))$$

である。

結び目 $k(p)$ の pair を (G_p, φ_p) とすると、$k(-p-1)$

は、$k(p)$ の mirror image であるから、その pair は、$(G_p, \varphi_p \circ \iota)$ で与えられる。

§5.1 Pretzel knots と Symmetries

k を、3次元球面 S^3 中の結び付けられた結び目とする。k に対する triple (G, φ, φ^*) とは、(G, φ) が、k の pair で、φ^* が、$\mathbb{Z}$ から G への準同型写像で、$(\varphi(1), \varphi^*(1))$ が k の meridian-longitude pair であるものを言う（[9], Chapter VII, §1)。1次元結び目 k_1 と k_2 の triple $(G_1, \varphi_1, \varphi_1^*)$ と $(G_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$ が同型（written $(G_1, \varphi_1, \varphi_1^*) \cong (G_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$）とは、$G_1$ から G_2 への群同型写像 f で、$f \circ \varphi_1 = \varphi_2$, $f \circ \varphi_1^* = \varphi_2^*$ となるものが存在することである。

準定理 .2 ([9], Chapter VII, §3) k を S^3 中の結び目、(G, φ, φ^*) を k の triple とする。

1) k が invertible ならば、$(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi \circ \iota, \varphi^* \circ \iota)$、
2) k が positive-amphicheiral ならば、$(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi \circ \iota, \varphi^*)$
3) k が negative-amphicheiral ならば、$(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi, \varphi^* \circ \iota)$。

準定理5.3　torus knot，2-bridge knot，任意の整数 p、q、r に対する（$2p, q, r$），（p, q, q），（$p, q, \pm 1$）型の pretzel knot の pair は、trivial knot の pair（$\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}$）に、$\mathcal{S}$－同値である。

準定理5.2より、問題に対する反例には、invertible knot や positive-amphicheiral knot が使えないことになる。よって、準定理5.3に list されている結び目は使えない。そこで、最も簡単なこうほとして、（$2p+1$、$3, -3$）型の pretzel knot について考えることにする。定理5.1の注意から、$p \geq 0$ としてよい。

定理5.4　pretzel knot $k(p)$，$p \geq 0$，の pair は、

(i) distinct、

(ii) C において（よって K_1 において）既約、

(iii) $(G_p, \varphi_p) \not\cong (G_p, \varphi_p \circ \iota) \iff p \neq 0, 1$

を満たす。

証明。結び目群 G_p は、次の表示をもつ：

$$(5.4)\ \mathcal{P} = \left\langle x, y, z\ ;\ \begin{array}{l} (xz^{-1})^{-2}x(xz^{-1})^{2} = (zy^{-1})^{2}y(zy^{-1})^{-2}, \\ (yx^{-1})^{p}y(yx^{-1})^{-p} = (xz^{-1})^{-1}z(xz^{-1}) \end{array} \right\rangle$$

このとき、$k(p)$ の triple $(G_p, \varphi_p, \varphi_p^*)$ は、$\varphi(1) = x$、$\varphi^*(1) = (xz^{-1})^2(zy^{-1})^2(yx^{-1})^{-p}(xz^{-1})^{-1}(zy^{-1})^{-1}(yx^{-1})^{p+1}$ で例えば与えられる。次に、全ての整数 i に対し、$a_i = x^i y x^{i-1}$, $b_i = x^i z x^{i-1}$ とおくと、

$$(5.5)\ \mathcal{P} = \left\langle x, a_i, b_i\ ;\ \begin{array}{l} x a_i x^{-1} = a_{i+1},\ x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ b_i^2 b_{i+1}^2 = (b_i a_i^{-1})^2 a_i (b_{i+1} a_{i+1}^{-1})^{-2}, \\ a_i^{p+1} a_{i+1}^{-p} = b_i^2 b_{i+1}^{-1},\quad i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle$$

となり、さらに、

$$(5.6)\ \mathcal{P} = \left\langle x, a_i, b_i\ ;\ \begin{array}{l} x a_i x^{-1} = a_{i+1},\ x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ a_i = (a_i b_i^{-1} a_i b_i)(b_{i+1}^{-1} a_{i+1}^{-1} b_{i+1} a_{i+1}^{-1}), \\ b_i = (b_i^{-1} a_i^{p}) a_i (a_{i+1}^{-p} b_{i+1}),\ i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle$$

$$(5.7)\ = \left\langle x, a_i, b_i\ ;\ \begin{array}{l} x a_i x^{-1} = a_{i+1},\ x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ b_i^{-1} a_i b_i = a_{i+1} b_{i+1}^{-1} a_{i+1} b_{i+1}, \\ b_i^{-2} a_i^{p+1} = b_{i+1}^{-1} a_{i+1}^{p},\ i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle$$

このとき、$\varphi_p(1)=x$、$\varphi_p^*(1)=b_0^2(b_0a_0^{-1})^2a_0^{-p}b_0^{-1}(b_0a_0^{-1})^{-1}a_0^{p+1}$ となる。(5.7)より、G_pの交換子群$[G_p,G_p]$は、次のように表わせる。

$$(5.8)\quad \cdots * \underset{\substack{A_{-2}=C_{-1}\\B_{-2}=D_{-1}}}{H_{-2} *} H_{-1} \underset{\substack{A_{-1}=C_0\\B_{-1}=D_0}}{*} H_0 \underset{\substack{A_0=C_1\\B_0=D_1}}{*} H_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{*} H_2 * \cdots$$

ここに、H_iは自由群$\langle a_i, b_i ; \rangle$、$A_i=b_ia_ib_i^{-1}$、$B_i=b_i^2a_i^{p+1}$、$C_i=a_ib_i^{-1}a_ib_i$、$D_i=b_i^{-1}a_i^p$ である。よって、A_iとB_iで生成される群は、H_i($\ni H_{i+1}$)の階数2の自由な真部分群である。さらに、H_iは、A_iとC_iとD_iで生成される($a_i=C_iA_i^{-1}$, $b_i=(C_iA_i^{-1})^pD_i^{-1}$)。また、$H_i$のabel化群は、階数2の自由可換群で、$A_i$と$B_i$で生成される部分群$\langle A_i, B_i\rangle$の、そこでの像は、指数2の部分群である。$\langle A_i, B_i\rangle=\langle C_{i+1}, D_{i+1}\rangle$の$H_{i+1}$のabel化群の中での像に関しても同様である。よって、pretzel knot $k(p)$は、fibred knotではない。

(i) $k(p)$のAlexander多項式を調べることにより、G_pが各pに対し、同型でないことが解かる。

(ii) (G_p, φ_p) が、各 p に対し、$\mathcal{C}$ で既約であることを、証明しよう。

群 G に対し、その交換子群 $[G,G]$ を、G' で表わす。また、G の部分群 H に対し、H の G での *normal closure* を、H^G で表わす。さらに、$a, b \in G$ に対し、$a^b = bab^{-1}$, $H^b = bHb^{-1}$ とする。

(G_p, φ_p) が、$\mathcal{C}$ で既約でないと仮定する。すると、$\mathcal{C}$ の元 (X, φ_X) と (Y, φ_Y) で、$(G_p, \varphi_p) = (X, \varphi_X) * (Y, \varphi_Y)$ かつ、$X \not\cong \mathbb{Z}$, $Y \not\cong \mathbb{Z}$ となるものが存在する。定理2.3より、$G_p' = X' * Y'$（自由積）で，$X' \neq 1$, $Y' \neq 1$ となる。G_p' の任意の元 w に対し、$L(w)$ を、自由積 $X' * Y'$ の意味での w の *syllable length* とする。

I. $L(a_i) = 1$ の場合： $a_i \in X'$ と仮定してよい。すると、$(G_p / a_i^{G_p})' \cong (X / a_i^X)' * Y' \cong \langle b_i ;\ b_{i+1} = b_i^2 \rangle \cong Q_2$, *the group of the rational numbers with denominator a nonnegative power of 2 under addition*。Q_2 は、自由積の意味で既約であり、$Y' \neq 1$ であるから、定理　　より、$Y' \cong Q_2$。これは矛盾である。

II. $L(b_i)=1$ の場合： $b_i \in X'$ と仮定してよい。すると、$Y' \cong \langle a_i \ ; \ a_i = a_{i+1}^2, \ a_i^{p+1} = a_{i+1}^p \rangle = \langle a_i \ ; \ a_i = a_{i+1}^2, \ a_{i+1}^{p+2} = 1 \rangle$。よって、$p \neq 2$ であるから、$Y' \cong \langle a \ ; \ a^l = 1 \rangle$。ここに、$l$ は、$p+2$ の最大の奇数の約数である。すると、$Y' = 1$ 又は、Y' が、自明でない有限巡回群となり、

III. $L(a_i), L(b_i) \geqq 2$ の場合： $E_i = D_i C_i$、C_0 と E_0 の $X' * Y'$ での normal form を、それぞれ $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_u$、$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot \beta_v$ とする。すると、C_i, E_i の normal form は、それぞれ、$\alpha_1^{x^i} \cdot \alpha_2^{x^i} \cdot \cdots \cdot \alpha_u^{x^i}$、$\beta_1^{x^i} \cdot \beta_2^{x^i} \cdot \cdots \cdot \beta_v^{x^i}$ となる。というのは、$C_i = C_0^{x^i} = \alpha_1^{x^i} \cdot \alpha_2^{x^i} \cdot \cdots \cdot \alpha_u^{x^i}$ であり、x の X', Y' 上への作用が閉じているからである。(5.6)より、$a_0 (= C_0 C_1^{-1})$, $b_0 (= E_0 E_1^{-1})$ の normal form は、それぞれ、或る正の整数 $u' \leqq u$ と $v' \leqq v$ に対し、

$$\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_{u'-1} \cdot \alpha_{u'} (\alpha_{u'}^x)^{-1} \cdot (\alpha_{u'-1}^x)^{-1} \cdot \cdots \cdot (\alpha_1^x)^{-1},$$

$$\beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_{v'-1} \cdot \beta_{v'} (\beta_{v'}^x)^{-1} \cdot (\beta_{v'-1}^x)^{-1} \cdot \cdots \cdot (\beta_1^x)^{-1}$$

となる。$L(a_i), L(b_i) \geqq 2$ であるから、このことより、$L(a_i), L(b_i) \geqq 3$、(奇数)。

$\beta_1 = \beta_1^x$ ならば、$(\beta_1 X' \beta_1^{-1})^x = \beta_1 X' \beta_1^{-1}$、$(\beta_1 Y' \beta_1^{-1})^x =$

$\beta_1 Y' \beta_1^{-1}$。また、$G_p' = \beta_1 X' \beta_1^{-1} * \beta_1 Y' \beta_1^{-1}$ である。よって、a_i, b_i, X', Y' を、それぞれ、β_1 による共役 $a_i^{\beta_1}, b_i^{\beta_1}, X'^{\beta_1}, Y'^{\beta_1}$ でおきかえることにより、$\beta_1 \neq \beta_1^x$ と仮定してもよいであろう。

$a_0 = c_0 c_1^{-1}$ であるから、$a_1 = (b_0^{-1} a_0 b_0)(b_1^{-1} a_1^{-1} b_1)$ となる。従って、

$$
\begin{aligned}
(5.9)\qquad & \alpha_1^x \cdot \alpha_2^x \cdot \cdots \cdot (\alpha_2^{x^2})^{-1} \cdot (\alpha_1^{x^2})^{-1} \\
&= (\beta_1^x \cdot \beta_2^x \cdot \cdots \cdot \beta_2^{-1} \cdot \beta_1^{-1})(\alpha_1 \alpha_2 \cdot \cdots \cdot (\alpha_2^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1}) \\
&\quad \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1^{x^2} \cdot \beta_2^{x^2} \cdot \cdots \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \\
&\quad \cdot (\alpha_1^{x^2} \alpha_2^{x^2} \cdot \cdots \cdot (\alpha_2^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1^x \cdot \beta_2^x \cdot \cdots \cdot (\beta_2^{x^2})^{-1} \cdot (\beta_1^{x^2})^{-1})。
\end{aligned}
$$

III-1. $\alpha_1 \neq \beta_1$ の場合：　(5.9)の左辺を見ると、a_1 の syllable の最初は、α_1^x である。一方、$L(a_1) \geqq 3$ かつ $\beta_1 \neq \beta_1^x$ より、(5.9)の右辺から、a_1 の最初の syllable が β_1^x となる。よって、$\alpha_1^x = \beta_1^x$。故に、$\alpha_1 = \beta_1$ となり矛盾。

III-2. $\alpha_1 = \beta_1$ の場合：　このとき、$\alpha_1^x = \beta_1$ ならば、$\beta_1^x = \beta_1$ となるので、$\alpha_1^x \neq \beta_1$ である。(5.9)より、$L(a_1)$

$\geqq 2(L(b_0)+L(a_0)+L(b_0)-1)-2L(b_0)-1 = 2L(a_1)-3$。よって、$L(a_0)=L(a_1)\leqq 3$。$L(a_i)\geqq 3$ であったから、$L(a_i)=3$ となる。そこで、$\alpha_1\cdot\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1}$ を a_0 の normal form とする。(5.5) の関係式 $a_0^{p+1}a_1^{-p}=b_0^2 b_1^{-1}$ より、

(5.10) $$(\alpha_1\cdot\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1})^{p+1}\cdot(\alpha_1^{x^2}\cdot(\alpha^x)^{-1}\cdot(\alpha_1^x)^{-1})^p$$
$$=(\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot(\beta_2^x)^{-1}\cdot(\beta_1^x)^{-1})\cdot(\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot(\beta_2^x)^{-1}\cdot(\beta_1^x)^{-1})$$
$$\cdot(\beta_1^{x^2}\cdot\beta_2^{x^2}\cdot\cdots\cdot(\beta_2^x)^{-1}\cdot(\beta_1^x)^{-1})。$$

(5.10) の左辺の normal form は、

(5.11) $$\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot(\beta_2^x)^{-1}\cdot(\beta_1^x)^{-1}\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot(\beta_2^x)^{-1}\cdot(\beta_1^x)^{-1}\beta_1^{x^2}\cdot\beta_2^{x^2}\cdot\cdots$$
$$\cdot(\beta_2^x)^{-1}\cdot(\beta_1^x)^{-1},$$

で与えられる。

1) $p=0$ の場合：(5.10) の左辺は $\alpha_1\alpha(\alpha_1^x)^{-1}$。よって $L(\alpha_1\alpha(\alpha_1^x)^{-1})=3$。一方、(5.10) の右辺の syllable length は、$3L(b_0)-2\geqq 7$ となり、矛盾。

2) $p=1$ の場合：(5.10) の左辺、右辺を比較することにより、$b_0=\beta_1\beta_2(\beta_2^x)^{-1}(\beta_1^x)^{-1}=\alpha_1\alpha(\alpha_1^x)^{-1}=a_0$

となり、$H_0=\langle a_0, b_0\rangle$ が、階数2の自由群であることに矛盾する。

3) $p\geqq 2$ の場合：（5.10）の左辺の normal form は、

(5.12) $\alpha_1\cdot\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1\cdot\alpha\cdot\cdots\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1\cdot\alpha\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}\cdot(\alpha^x)^{-1}\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}$

$\cdot\cdots\cdot(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}\cdot(\alpha^{x-1})\cdot(\alpha_1^x)^{-1}$。

（5.11）の syllable length は、$3L(b_0)-2$ であり、(5.12) の syllable length は、$3(2p+1)-2p = 4p+3$ となる。よって、$L(b_0)=\frac{1}{3}(4p+5)$。（5.11）と（5.12）を比べることにより、$\beta_2=\alpha=(\beta_2^x)^{-1}=(\alpha^x)^{-1}$ 且つ、$\beta_3=(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1^{x^2}$ を得る。故に、$\alpha^{x^2}=\alpha$ 且つ、$\alpha_1^{x^2}=\alpha_1$。さらに、$b_0=\beta_1\beta_2\cdots(\beta_2^x)^{-1}(\beta_1^x)^{-1}=\alpha_1[\alpha(\alpha_1^x)^{-1}\alpha_1]^{\frac{2}{3}(p-1)}\alpha(\alpha_1^x)^{-1}$。よって、$a_0^{x^2}=a_0$ 且つ、$b_0^{x^2}=b_0$。従って、$H_{2i}=H_0$、$H_{2i+1}=H_1$ が、全ての $i\in\mathbb{Z}$ に対し成り立つ。よって、G_p' は、有限生成となり、（5.8）に矛盾する。

（1)、2)、3）の部分の証明は、p を負の整数に取って、次の様に、簡単に出来る。この場合、（5.10）の左辺の normal form の最初の syllable は、α_1^x である。なぜなら $\alpha_1\neq\alpha_1^x$。すると、$\alpha_1^x=\beta_1$ となり矛盾である。）

(iii) の証明。　準定理5.3より、$p=0, 1$ の場合に、$(G_p, \varphi_p) \cong (G_p, \varphi_p \circ \iota)$ となることは明らかである。故に、ある $p \geqq 0$ が、$(G_p, \varphi_p) \cong (G_p, \varphi_p \circ \iota)$ を満たすならば、$p=0$ 又は、1 であることを示す。

$(G_p, \varphi_p) \cong (G_p, \varphi_p \circ \iota)$ を与える G_p の自己同型写像を f とする。

補題5.13　$f \circ \varphi_p^* = \varphi_p^*$ 又は、$\varphi_p^* \circ \iota$ 。

証明。まず、$k(p)$ が、cable knot でないことを示そう。もし、$k(p)$ が cable knot であるならば、$k(p)$ の companion λ が存在する。その order μ は $\geqq 2$ である。結び目 k の bridge number を、$b(k)$ で表わす。すると、[　] により、$\mu \cdot b(\lambda) \leqq b(k(p))$ 。よって、$b(k(p)) \geqq 4$ 。ところが、$b(k(p)) \leqq 3$ であるから、矛盾。

さて、(ii) より、$k(p)$ は、prime knot である。故に、J. Simon [　] により、$\varphi_p^*(\mathbb{Z}) = C_{G_p}(\varphi_p(1)) \cap G_p'$ となる。ここに、群 G の元 g に対し、$C_G(g)$ は、g の G における中心化群である。すると、$f \circ \varphi_p^*(\mathbb{Z}) = C_{G_p}(f \circ \varphi_p(1)) \cap G_p' = C_{G_p}(\varphi_p \circ \iota(1)) \cap G_p' = C_{G_p}(\varphi(-1)) \cap G_p' =$

$C_{G_p}(\varphi(1)) \cap G_p' = \varphi_p^*(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ となる。故に、$f \circ \varphi_p^* = \varphi_p^*$ 又は、$\varphi_p^* \circ \iota$ となる。 //

今、$\hat{G}_p = G_p / \varphi_p^*(1)^{G_p}$、$\varsigma_p$ を G_p から $\hat{G}_p$ への、自然な全射準同型写像とする。すると、補題5.13により、$\hat{f} = \varsigma_p \circ f$ が、$(\hat{G}_p, \varsigma_p \circ \varphi_p) \cong (\hat{G}_p, \varsigma_p \circ \varphi_p \circ \iota)$ を与える。 $\varphi_p^*(1) = A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0$ であったから、$\hat{G}_p$ は、次の表示をもつ。

$$(5.14) \quad \left\langle x, a_i, b_i \;;\; \begin{array}{l} a_i^x = a_{i+1},\ b_i^x = b_{i+1},\ A_i = C_{i+1}, \\ B_i = D_{i+1},\ A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0,\ i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\rangle .$$

G_p に於ては、全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し、$\varphi_p^*(1) = A_i^{-1} B_i^{-1} A_i B_i$ である。また、$\hat{H} = \langle a, b \;;\; A^{-1} B^{-1} A B \rangle$, $A = b^{-1} a b$, $B = b^2 a^{p+1}$、なる群においては、$\langle A, B \rangle$、さらに、$\langle C, D \rangle$, $C = a b^{-1} a b$, $D = b^{-1} a^p$, は、階数2の自由可換群になっている。よって、$\hat{G}_p'$ は、

$$(5.15) \quad \cdots * \hat{H}_{-2} \underset{\substack{A_{-2} = C_{-1} \\ B_{-2} = D_{-1}}}{*} \hat{H}_{-1} \underset{\substack{A_{-1} = C_0 \\ B_{-1} = D_0}}{*} \hat{H}_0 \underset{\substack{A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1}}{*} \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2}}{*} \hat{H}_2 * \cdots$$

となっている。ここに、$\hat{H}_i = \langle a_i, b_i \;;\; A_i B_i = B_i A_i \rangle$。

補題 5.16　或る $m \in \mathbb{Z}$ と $d \in \hat{G}_p'$ に対し、$\hat{f}(\hat{H}_0) = \hat{H}_m^d$。

証明。$\langle A_i, B_i \rangle$ の自明でない元と可換な $\hat{G}_p'$ の元を計算することによって証明する。この目的の為、まず、$\langle A_i, B_i \rangle$ 又は、$\langle C_i, D_i \rangle$ の自明でない元各々の $\hat{H}_i$ に於ける centralizer を調べることにする。

準補題 5.17　任意の整数 i に対し、

1) $C_{\hat{H}_i}(A_i^q B_i^r) = \begin{cases} \langle A_i, B_i \rangle & \text{if } q \neq r(p+1) \\ \hat{H}_i & \text{otherwise,} \end{cases}$

2) $C_{\hat{H}_i}(C_i^q D_i^r) = \begin{cases} \langle C_i, D_i \rangle & \text{if } 2q \neq r \\ \hat{H}_i & \text{otherwise,} \end{cases}$

3) $Z(\hat{H}_i) = \langle A_i, B_i \rangle \cap \langle C_i, D_i \rangle = \langle A_i^{p+1} B_i \rangle$、

4) $Z(\hat{H}_i) \cap Z(\hat{H}_{i+1}) = 1$、

5) $\hat{H}_i \cap \hat{H}_{i+3} = 1$.

証明。$i = 0$ の場合について、証明すれば十分であろう。$x_j = b_0^j a_0 b_0^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, とする。すると、$a_0^{\hat{H}_0}$ は次のような表示をもつ。

$$(5.18)\quad \langle x_j \,;\, x_{j-1}^{-1} x_j^{-p-1} x_{j+1} x_j^{p+1},\ j \in \mathbb{Z} \rangle$$

これは、次の表示に等しい。

$$(5.19)\quad \langle x_0, x_1 \,;\, \rangle .$$

故に、$\hat{H}_0$ は次の表示をもつ。

$$(5.20)\quad \langle b_0, x_0, x_1 \,;\, x_0^{b_0} = x_1,\ x_1^{b_0} = x_1^{p+1} x_0 (x_1^{p+1})^{-1} \rangle .$$

よって、次の等式が成り立つ。

$$(5.21)\quad b_0^{2j} x_\epsilon b_0^{-2j} = (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^j x_\epsilon (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-j}, \qquad j \in \mathbb{Z},\ \epsilon = 0, 1 .$$

1)の証明。 $A = A_0^{b_0}$、$B = (B_0^{-1})^{b_0}$ とする。すると、$A = x_0$，$B = x_1^{-p-1} b_0^2$。等式 (5.21) により、$A^q B^{-r} = x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r b_0^{-2r}$。$W$ を、$C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r})$ の元とする。

1. $W = W' b_0^{2m}$，$W' (\neq 1) \in a_0^{\hat{H}_0}$ の場合： $W^* = W B^{-m}$ とおく。W と B は、$C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r})$ の元であるから、$W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であり、$(A^q B^{-r}) W^* = W^* (A^q B^{-r})$ となる。よって、

$$(5.22)\quad W^* = (A^q B^{-r})^{-1} W^* (A^q B^{-r})$$
$$= b_0^{2r} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r b_0^{-2r}$$
$$= x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)} .$$

$a_0^{\widehat{H}_0}$ は自由群であり、$W^* \in a_0^{\widehat{H}_0}$ であるから、$q \neq r(p+1)$ ならば、$C_{\widehat{H}_0}(A^q B^{-r}) \leq \langle A, B \rangle$。よって、$C_{\widehat{H}_0}(A_0^q B_0^r) \leq \langle A_0, B_0 \rangle$。一方、$\langle A_0, B_0 \rangle$ は可換群であるから、$C_{\widehat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = \langle A_0, B_0 \rangle$。また、$q = r(p+1)$ ならば、(5.22) より、$a_0^{\widehat{H}_0}$ の任意な元が、$A^q B^{-r}$ と可換となるから、$C_{\widehat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = \langle a_0, B \rangle = \widehat{H}_0$。

2. $W = W' b_0^{2m+1}$, $W' \overset{(\neq 1)}{\in} a_0^{\widehat{H}_0}$ の場合： $W^* = W B^{-m} b_0^{-1}$ とおく。すると、$W^* \in a_0^{\widehat{H}_0}$、かつ、$(A^q B^{-r}) W^* b_0 = (A^q B^{-r}) W^* b_0$。故に、

$$(5.23)\quad W^* = b_0^{2r} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^q x_0^{-q+r(p+1)} W^* b_0 x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-q} b_0^{-2r-1}$$
$$= x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_1^{q-r(p+1)} .$$

$a_0^{\widehat{H}_0}$ は自由群であり、$W^* \in a_0^{\widehat{H}_0}$ であるから、$q \neq r(p+1)$ ならば、$W^* = 1$ となり、$W = b_0 B^m = B_0^m b_0$ となってしまう。よって、$q = r(p+1)$ で、$C_{\widehat{H}_0}(A_0^q B_0^{\varepsilon r}) = C_{\widehat{H}_0}(A^q B^{-r}) = \widehat{H}_0$。

2) の証明。 $C = C_0^{b_0}$、$D = (D_0^{-1})^{b_0}$ とする。すると、$C = x_1 x_0$ かつ $D = x_1^{-p} b_0$。 $C_{\hat{H}_0}(C^q D^{-r})$ の元 $W = W' b_0^m$ とする。ここに、$W' \in a_0^{\hat{H}_0}$ である。更に、$W^* = W D^{-m}$ とする。すると、$(C^q D^{-r}) W^* = W^*(C^q D^{-r})$。

1'. $r = 2r'$ の場合： $C^q D^{-2r'} = (x_1 x_0)^{q-r'}(x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'} b_0^{-2r'}$。故に、

$$
\begin{aligned}
W^* &= (C^q D^{-2r'})^{-1} W^* (C^q D^{-2r'}) \\
&= b_0^{2r'}(x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-r'}(x_1 x_0)^{r'-q} W^* (x_1 x_0)^{q-r'}(x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'} \cdot b_0^{-2r'} \\
&= (x_1 x_0)^{r'-q} W^* (x_1 x_0)^{q-r'}.
\end{aligned}
$$

よって、$W^* = (x_1 x_0)^s =$ る整数 s に対し、$W^* = (x_1 x_0)^s (= C^s)$ である。1) の場合同様、$2q \neq r$ ならば、$C_{\hat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \langle C_0, D_0 \rangle$、$2q = r$ ならば、$C_{\hat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \hat{H}_0$ である。

2'. $r = 2r'+1$ の場合： $C^q D^{-2r'-1} = (x_1 x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'+1} b_0^{-r'-1}$。 $W^*(x_0, x_1)$ を、$W^* (\in a_0^{\hat{H}_0} = \langle x_0, x_1 ; \ \rangle)$ を表わす x_0, x_1 の語とする。 すると、

$b_0 W^*(x_0,x_1)\, b_0^{-1}$

$= b_0^{2r'+2}(x_1^{p+1}x_0^{p+1})^{-r'-1}x_1^{p}(x_1x_0)^{1+r'-q}W^*(x_0,x_1)\,(x_1x_0)^{q-r'-1}x_1^{-p}(x_1^{p+1}x_0^{p+1})^{r'+1}b_0^{-2r'-2}$

$= x_1^{p}(x_1x_0)^{1+r'-q}\,W^*(x_0,x_1)\,(x_1x_0)^{q-r'-1}x_1^{-p}$.

$b_0 W^*(x_0,x_1)\, b_0^{-1} = x_1^{p+1}W^*(x_1,x_0)\,x_1^{-p-1}$ であるから、

$$W^*(x_0,x_1) = (x_1x_0)^{q-r'-1}x_1 W^*(x_1,x_0)\,x_1^{-1}(x_1x_0)^{1+r'-q}.$$

故に、或る整数 s に対し、$W^*(x_0,x_1) = (x_1x_0)^s\ (= C^s)$ である。よって、$C_{\hat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \langle C_0, D_0\rangle$ である。

3) の証明。 1), 2) より、$\langle C_0, D_0\rangle$ が可換、$\hat{H}_0 = \langle A_0, B_0, C_0, D_0\rangle$ より、

$$Z(\hat{H}_0) = \langle A_0^{p+1}B_0\ (= C_0D_0^2)\rangle = \langle A_0, B_0\rangle \cap \langle C_0, D_0\rangle。$$

4) の証明。 $Z(H_0)\cap Z(H_1) = \langle A_0^{p+1}B_0\rangle \cap \langle C_1D_1^2\rangle = \langle A_0^{p+1}B_0\rangle \cap \langle A_0B_0^2\rangle = \{1\}$。

5) の証明。 $\hat{H}_0\cap\hat{H}_3 = (\hat{H}_0 \cap (\hat{H}_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{*} \hat{H}_2 * \cdots)) \cap ((\cdots * \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{*} \hat{H}_2) \cap \hat{H}_3) = (\hat{H}_0\cap\hat{H}_1)\cap(\hat{H}_2\cap\hat{H}_3) = ((\hat{H}_0\cap\hat{H}_1) \cap (\hat{H}_1\cap\hat{H}_2)) \cap ((\hat{H}_1\cap\hat{H}_2)\cap(\hat{H}_2\cap\hat{H}_3)) = (\langle C_1, D_1\rangle \cap$

$\langle A_1, B_1\rangle) \cap (\langle C_2, D_2\rangle \cap \langle A_2, B_2\rangle) = Z(\hat{H}_1) \cap Z(\hat{H}_2) = \{1\}$。

（準補助定理証明終）

次に、G_p' のどのようなえが、$\langle A_i, B_i\rangle$ の自明でないえと可換になるかを調べてみよう。

準補題 5.24　各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し、$V \in \hat{G}_p'$ が、$\langle A_i, B_i\rangle$ の自明でないえと可換ならば、$V \in \hat{H}_i$ 又は、$V \in \hat{H}_{i+1}$ である。

証明。$i = 0$ の場合について証明すれば十分である。$\hat{G}_p'$ を融合部分群 $\langle A_2, B_2\rangle (= \langle C_3, D_3\rangle)$ をもつ、$(\cdots \ast \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{\ast} \hat{H}_2)$ と $(\hat{H}_3 \underset{\substack{A_3=C_4\\B_3=D_4}}{\ast} \hat{H}_4 \ast \cdots)$ の融合積と考える。準補題 5.17. 5) と、Theorem 4.5（[ ]）より、$V \in \hat{G}_p'$ が、$\langle A_0, B_0\rangle$ の自明でないえと可換ならば、$V \in (\cdots \ast \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{\ast} \hat{H}_2)$。

同様に、$V \in (\hat{H}_{-1} \ast \hat{H}_0 \ast \cdots)$ が言える。よって、$V \in J = \hat{H}_{-1} \underset{\substack{A_{-1}=C_0\\B_{-1}=D_0}}{\ast} \hat{H}_0 \underset{\substack{A_0=C_1\\B_0=D_1}}{\ast} \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{\ast} \hat{H}_2$。次に、J を、融合部分群 $\langle A_{-1}, B_{-1}\rangle (= \langle C_0, D_0\rangle)$ をもつ、$\hat{H}_{-1}$ と $P = \hat{H}_0 \underset{\substack{A_0=C_1\\B_0=D_1}}{\ast} \hat{H}_1 \underset{\substack{A_1=C_2\\B_1=D_2}}{\ast} \hat{H}_2$

の融合積と考える。もし，$V \in J$ が、$\langle A_0, B_0\rangle - \hat{H}_{-1}$
$= \langle A_0, B_0\rangle - (\langle A_0, B_0\rangle \cap \hat{H}_{-1}) = \langle A_0, B_0\rangle - \langle A_0, B_0\rangle \cap \langle C_0, D_0\rangle$
$= \langle A_0, B_0\rangle - \langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、[ ] の Theorem 4.5 により、$V \in P$ である。準補題 5.17.1) より、$\langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ $(= \langle C_0 D_0^2\rangle = \langle A_{-1} B_{-1}^2\rangle)$ の自明でない元と可換な $\hat{H}_{-1}$ の元は、$\langle A_{-1}, B_{-1}\rangle$ $(\subseteq \hat{H}_0)$ に属する。故に、再び、[ ] の Theorem 4.5 より、$V \in J$ が、$\langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in P$ である。同様に、$V \in \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \;\; A_0=C_1 \\ B_{-1}=D_0 \;\; B_0=D_1}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0 * \hat{H}_1}$ となり、$V \in \underset{\substack{A_0=C_1 \\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1}$。よって、最後に、準定理 5.17.1),2),3) と、[ ] の Theorem 4.5 より、次を得る；

i) V が $\langle A_0, B_0\rangle - (Z(\hat{H}_0) \cup Z(\hat{H}_1))$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \langle A_0, B_0\rangle$、

ii) V が $Z(\hat{H}_0) = \langle A_0^{p+1} B_0\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \hat{H}_0$、

iii) V が $Z(\hat{H}_1) = \langle A_0 B_0^2\rangle$ の自明でない元と可換ならば、$V \in \hat{H}_1$。

（準補題 5.24 証明終）

；次に、$\hat{f}(\langle A_0, B_0\rangle)$ を考えてみよう。$\langle A_0, B_0\rangle$ は、

有限生成であるから、どの $g \in \hat{G}_p'$ に対しても、$\hat{f}(\langle A_0, B_0 \rangle)^g \le \hat{H}_\alpha \underset{\substack{A_\alpha = C_{\alpha+1} \\ B_\alpha = D_{\alpha+1}}}{*} \cdots\cdots \underset{\substack{A_{\alpha+\beta-1} = C_{\alpha+\beta} \\ B_{\alpha+\beta-1} = D_{\alpha+\beta}}}{*} \hat{H}_{\alpha+\beta}$ となる整数 α と、負でない整数 β が存在する。このような β の最小を β_0 とし、それを与える g, α の対の1つを、g_0, α_0 とする。そこで、もし $\beta_0 = 0$ ならば、$d = g_0^{-1}$ $m = \alpha_0$ に対し、補題5.16が、成立する。よって、$\beta_0 \ge 1$ としよう。$U = \hat{H}_{\alpha_0} \underset{\substack{A_{\alpha_0} = C_{\alpha_0+1} \\ B_{\alpha_0} = D_{\alpha_0+1}}}{*} \cdots\cdots\cdots \underset{\substack{A_{\alpha_0+\beta_0-2} = C_{\alpha_0+\beta_0-1} \\ B_{\alpha_0+\beta_0-2} = D_{\alpha_0+\beta_0-1}}}{*} \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0-1}$、$T = \hat{f}(\langle A_0, B_0 \rangle)$ とすると、$T^{g_0} \le U \underset{\substack{A_{\alpha_0+\beta_0-1} = C_{\alpha_0+\beta_0} \\ B_{\alpha_0+\beta_0-1} = D_{\alpha_0+\beta_0}}}{*} \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0}$。融合積に関する部分群定理（定理1.　）をこれに適用することにより、T は、tree積又は、tree積のHNN拡大になっている。T が、HNN拡大の場合、$\langle A_0, B_0 \rangle$ が階数2の自由可換群であるから、T^{g_0} もそうである。よって、T^{g_0} の base group は、無限巡回群 $S = \langle A_{\alpha_0+\beta_0-1}, B_{\alpha_0+\beta_0-1} \rangle^{d'} \cap T^{g_0} = \langle C_{\alpha_0+\beta_0}, D_{\alpha_0+\beta_0} \rangle^{d'} \cap T^{g_0}$ （d' は、$\hat{G}_p'$ の或る元）となり、free part t は、S に自明に作用している。準定理5.24により、$t \in \hat{H}^{d'}_{\alpha_0+\beta_0-1}$ 又は、$t \in \hat{H}^{d'}_{\alpha_0+\beta_0}$ となる。これは、T^{g_0} が、free part をもつことに反する。よって、T が、tree積の場合しか起らない。任意の可換群は、

融合積に関して完全既約である。故に、或る$\hat{G}_p'$の元d''に対し、$T^{g_0} = U^{d''} \cap T^{g_0}$ 又は、$T^{g_0} = \hat{H}^{d''}_{\alpha_0+\beta_0} \cap T^{g_0}$ となる。よって、$T^{g_0 d''} \le U^{d''}$ 又は、$T^{g_0} \le \hat{H}^{d''}_{\alpha_0+\beta_0}$ となり、β_0の最小性に反する。故に，$\beta_0 = 1$ となり、補題5.16は証明された。//

補題5.25　$\hat{H}_0$の$\hat{G}_p'$での正規化群 $N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) = \hat{H}_0$ 。

証明。$\hat{G}_p'$は、$(\cdots * \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0})$ と $(\underset{\substack{A_1=C_2 \\ B_1=D_2}}{\hat{H}_1 * \hat{H}_2} * \cdots)$ の融合積であり、その融合部分群$\langle A_0, B_0 \rangle$は、$\hat{H}_0$の真部分群であるから、$N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \le (\cdots * \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0})$。同様に、$N_{\hat{G}_p'}(\hat{N}_0) \le (\underset{\substack{A_0=C_1 \\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1} * \cdots)$。故に、$N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \le$ $(\cdots * \underset{\substack{A_{-1}=C_0 \\ B_{-1}=D_0}}{\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0}) \cap (\underset{\substack{A_0=C_1 \\ B_0=D_1}}{\hat{H}_0 * \hat{H}_1} * \cdots) = H_0$ となり、補題が証明される。//

m, dを、準定理　で与えられるものとする。$\hat{G}_p$の自己同型写像Fを、$F(g) = x^{-m}\hat{f}(g)x^m$，$g \in \hat{G}_p$，で定義

する。すると、$F(x)=x^{-1}$、$F(\widehat{H_0})=\widehat{H_0}^{\bar{d}}$、ここに $\bar{d}=d^{x^{-m}}$

である。$F(\underbrace{\widehat{H_0}*\widehat{H_1}}_{A_0=C_1,\ B_0=D_1}) = \underbrace{F(\widehat{H_0}) * F(\widehat{H_1})}_{F(A_0)=F(C_1),\ F(B_0)=F(D_1)} = F(\widehat{H_0})*F(\widehat{H_0}^{x})$

$=\widehat{H_0}^{\bar{d}} * (\widehat{H_0}^{\bar{d}})^{x^{-1}} = \widehat{H_0}^{\bar{d}} * \widehat{H_{-1}}^{\bar{d}^{x^{-1}}}$ となる。ここで、部分

群定理1. を、$F(\widehat{H_0}*\widehat{H_1}) \le \widehat{G_p}' = (\cdots * \widehat{H_{-2}} * \widehat{H_{-1}})$

$\underset{A_{-1}=C_0,\ B_{-1}=D_0}{*} (\underbrace{\widehat{H_0}*\widehat{H_1}}_{A_0=C_1,\ B_0=D_1}*\cdots)$ に適用すると、$\bar{d}^{x^{-1}} \in \widehat{G_p}'$ である

から、或る $\tilde{d} \in \widehat{G_p}'$ に対し、$F(\langle A_0,B_0\rangle)=\langle C_0,D_0\rangle^{\tilde{d}} \cap F(A_0,B_0)$

となることが解る。ところが、これをもとに、更に強く、$\langle C_0,D_0\rangle^{\tilde{d}}$, $\widehat{H_{-1}}^{\tilde{d}}$, $\widehat{H_0}^{\tilde{d}}$ の3つの自明でない部分群だけが、$\langle C_0,D_0\rangle^{\tilde{d}}$ $(=\langle A_{-1},B_{-1}\rangle^{\tilde{d}})$ の自明でない元の中心化群になり得る（準定理5.17. 1),2),4)，準定理5.24）ことから、$F(\langle A_0,B_0\rangle)=\langle C_0,D_0\rangle^{\tilde{d}}$，また、$F(\widehat{H_0})=\widehat{H_0}^{\tilde{d}}$、$F(\widehat{H_1})=\widehat{H_{-1}}^{\tilde{d}}$ が言える。$F(x)=x^{-1}$ であるから、$F(\langle C_0,D_0\rangle)$ $=F(\langle A_0^{x^{-1}},B_0^{x^{-1}}\rangle) = F(\langle A_0,B_0\rangle)^{F(x^{-1})} = (\langle C_0,D_0\rangle^{\tilde{d}})^{x}$ $=$ $\langle C_1,D_1\rangle^{\tilde{d}x}$。故に、$\widehat{H_0}^{\tilde{d}}=\widehat{H_0}^{\tilde{d}x}$。補題5.25より、$d_0$ $=\tilde{d}^{-1}\tilde{d}^{x}$ は、$\widehat{H_0}$ に属する。よって、$\widehat{G_p}$ の自己同型写像 F は、次の6つを満たすことになる：

① $F(\widehat{H_0})=\widehat{H_0}^{\tilde{d}}$ ，$\tilde{d}\in\widehat{G_p}'$，

② $F(\langle A_0,B_0\rangle)=\langle C_0,D_0\rangle^{\tilde{d}}$ $(\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$， ③ $F(\langle C_0, D_0\rangle) = \langle A_0, B_0\rangle^{\mathfrak{a} d_0}$ $(\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$, $d_0 \in \widehat{H_0}$、

④ $F(A_0) = (C_0^u D_0^v)^{\mathfrak{a}}$, $u, v \in \mathbb{Z}$, ならば、$F(C_0) =$
$\left(F(A_{-1}) = F(A_0^{x^{-1}}) = ((C_0^u D_0^v)^{\mathfrak{a}})^x = (C_1^u D_1^v)^{\mathfrak{a} x} = \right)$ $(A_0^u B_0^v)^{\mathfrak{a} d_0}$、

⑤ $F(B_0) = (C_0^{u'} D_0^{v'})^{\mathfrak{a}}$, $u', v' \in \mathbb{Z}$, ならば、$F(D_0) =$
$(A_0^{u'} B_0^{v'})^{\mathfrak{a} d_0}$、

⑥（準補題 5.17.3）より） $F(A_0^{p+1} B_0) = ((A_0^{p+1} B_0)^{\mathfrak{a}})^{\pm 1}$。

これにより、Fより、a_0, b_0を基底とする階数2の自由可換群（$\mathbb{Z}$-free module） $\overline{H_0} = \widehat{H_0}/\widehat{H_0}'$ 上の自己同型写像 $\overline{F}$ が定義される。A_0, B_0, C_0, D_0 は、この $\overline{H_0}$ では、行ベクトル $(1, 0)$, $(p+1, -2)$, $(2, 0)$, $(p, -1)$ とそれぞれ表わされる。そこで、$\overline{F}$ に対応する2次の正方行列をMとすると、$\overline{F}$の性質①〜⑥により、

①* $\det M = \pm 1$、 $uv' - vu'$ $M = \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}$

②* $uv' - vu = \pm 1$、

③* $(1, 0) M = u(2, 0) + v(p, -1)$、

④* $(2, 0) M = u(1, 0) + v(p+1, -2)$、

⑤* $(p+1, -2) M = u'(2, 0) + v'(p, -1)$、

⑥* $(2p+2, -2) M = \pm(2p+2, -2)$。

となる整数 u, v, u', v' が存在することになる。簡単な

この計算から、この様なMは、$p=-2,-1,0,1$の場合だけ存在し、$p \geqq 0$より、定理5.4.iii)が証明された。

定理5.1の証明は、省略。 //

References

[1]

[2] Waldhausen, F., On irreducible 3-manifolds with which are sufficiently large. Ann. Math. 87 (1968), 56-88.

[3] Maeda, T., A Unique Decomposition for Knot-Like Groups, Math. Seminar Notes 6 (1978), 567-602

[4] Baumslag, G.,

[5] Karrass, A. & Solitar. D.; The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 227-255

[6]

[7] Hashizume, Y.; Unique factorization of links

[8] Sharler, T. P.; Separating, incompressible surfaces in 3-manifolds, Inv. Math. 52 (1972), 105-126

[9] Neuwirth; Knot Groups